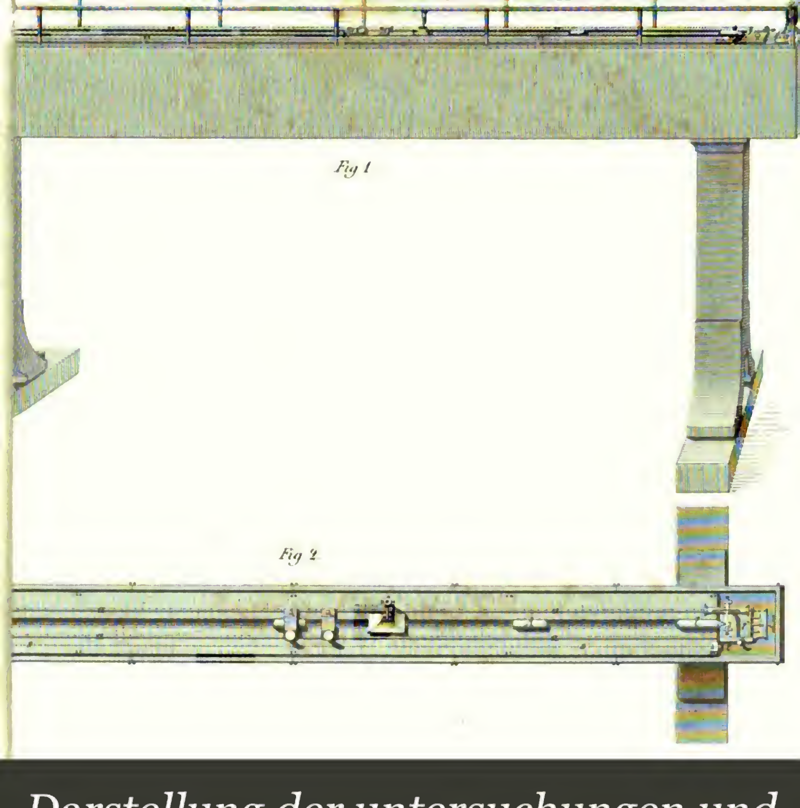


Darstellung der untersuchungen und maassregeln, welche, in 1835 bis ...

Friedrich Wilhelm Bessel

Phys 428.39

HARVARD COLLEGE
LIBRARY

Bought from the Bequest of

Horace Appleton Haven

Class of 1842

For the Purchase of
Books on Astronomy and Mathematics

Digitized by Google

Digitized by Google

Seinem hochgeehrten Freunde
Herrn Prof. C. G. J. Jacobi
F W Bessel

Digitized by Google

Darstellung

der

Untersuchungen und Maafsregeln,

welche,

in den Jahren 1835 bis 1838,

durch

die Einheit des Preufsischen Längenmaafses veranlafst worden sind

von

Friedrich Wilhelm

F. W. BESSEL.

Bekannt gemacht durch das Ministerium der Finanzen und des Handels.

Mit 7 Kupfertafeln.

Berlin.
Gedruckt in der Druckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften.

1839.

Digitized by Google

Phys 428.39

1851 Lec 2
Haven Fund



Digitized by Google

Inhaltsverzeichnifs.

Digitized by Google

Digitized by Google

Einleitung.

Die vom 16ten Mai 1816 datirte Maafs- und Gewichtsordnung für die Preufsischen Staaten beabsichtigt, die Unsicherheit zu entfernen, welche, bis dahin, über die Einheiten der Maafse und Gewichte stattfand. In Beziehung auf das Längenmaafs bestimmt dieses Gesetz, dafs der *Preufsische Fufs* seine Einheit sein soll; dafs ein Probemaafs desselben, unter Aufsicht einer Commission von Sachverständigen, nach einer, dem Gesetze beiliegenden Anweisung, verfertigt, bei dem Ministerium der Finanzen und des Handels aufbewahrt und das einzig autorisirte Original für sämmtliche Preufsischen Staaten sein soll.

Dasselbe Gesetz fordert ferner, dafs drei Copien des Originals, unter gleicher Aufsicht genommen und resp. bei der Königlichen Ober-Baudeputation, bei der mathematischen Classe der Königlichen Akademie der Wissenschaften und bei dem Königlichen Kammergerichte niedergelegt werden. Diese Copien sollen, so oft es nöthig gefunden wird, wenigstens aber alle zehn Jahre, mit dem Originale verglichen und nöthigenfalls berichtigt, die die darüber aufgenommenen Protocolle auch durch den Druck bekannt gemacht werden. Die schon erwähnte das Gesetz begleitende Anweisung bestimmt, dafs der Preufsische Fufs 139,13 Linien des Pariser Fufses enthalten, auch dafs sein Verhältnifs zur Secundenpendellänge von Berlin beobachtet und bekannt gemacht werden soll, damit er auf einem Urmaafse beruhe, welches zu allen Zeiten, bei entstehenden Zweifeln, wiedererlangt werden könne.

Dieser Verordnung gemäfs sind das Original des Preufsischen Längenmaafses und seine drei Copien verfertigt und vorschriftsmäfsig niedergelegt worden. Alle vier Exemplare sind, äufserlich fast gleiche, Stäbe von Eisen,

Digitized by Google

von 3 Fufs 7 Lin. Länge, 14,6 Lin. Breite und 4,9 Lin. Dicke; sie geben die Länge von drei *Fufsen*, so wie auch die Abtheilung derselben in 36 *Zolle* und des letzten Zolles in 12 *Linien*, durch Striche an, welche zwei, auf einer der breiten Seiten des Stabes, seiner ganzen Länge nach, in etwa 0,4 Linien Entfernung voneinander, gezogene Linien senkrecht durchschneiden. Diese Striche sind auf Silber gezogen, und zwar für die *Zolle* auf Stiften dieses Metalls, welche man durch, ganz durch das Eisen gehende, Bohrlöcher getrieben hat, für die *Linien* auf einer eingelegten Platte; die Oberfläche des Silbers ist der Oberfläche des Eisens gleich geschliffen; die Striche sind hinreichend scharf und fein eingeschnitten. — Hierdurch ist eine der Forderungen des Gesetzes erfüllt; die ferner geforderte Bestimmung der Secundenpendellänge für Berlin habe ich im Jahre 1835 ausgeführt und den Bericht darüber, in den Schriften der Akademie der Wissenschaften für 1835, bekannt gemacht; die endlich geforderte Vergleichung der Copien mit dem Originale habe ich, gleichfalls im Jahre 1835, zum erstenmale, gemacht.

Aus diesen Anführungen geht hervor, dafs sämmtliche, die Einheit des Preufsischen Längenmaafses betreffende Vorschriften des Gesetzes gegenwärtig erfüllt sind. Es ist indessen nicht unnöthig, zu untersuchen, inwiefern diese Einheit dadurch unzweideutig bestimmt ist. Als sich von selbst verstehend kann angenommen werden, dafs die den Preufsischen Fufs bestimmende Länge, die Entfernung der beiden *äufsersten* Theilstriche des Originals, er selbst also das Drittel dieser Länge und daher von der Voraussetzung der Richtigkeit der Theilung in resp. 36 und 12 Theile unabhängig ist. Eben so kann man ihn als unabhängig von der Voraussetzung des Parallelismus der beiden äufsersten Theilstriche annehmen, indem man gleichfalls als sich von selbst verstehend ansehen kann, dafs seine dreifache Länge, *in der Mitte* zwischen beiden Linien, zwischen welchen die Theilstriche gezogen sind, gemessen werden soll. Über die Wärme, in welcher der, das Original enthaltende Stab von Eisen sich befinden soll, damit die Entfernung seiner beiden äufsersten Theilstriche drei Preufsische Fufs sei, ist in dem Gesetze zwar nichts bestimmt; allein man kann annehmen, dafs sie der Wärme gleich sein soll, in welcher die materiellen Exemplare des Pariser Maafses sich befinden müssen, damit sie dieses Maafs ergeben. Diese Wärme ist bekanntlich die Wärme von 13° der achtzigtheiligen, oder 16°,25 der

Digitized by Google

hunderttheiligen Thermometerscale. Die Annahme dieser Wärme wird *wahrscheinlich*, durch die Angabe des beabsichtigten Verhältnisses des Preufsischen Fufses zu dem Pariser Fufse, welche ohne eine Angabe der Wärme gemacht, und daher wohl so zu verstehen ist, dafs das Preufsische Probemaafs von Eisen, zu dem, bekanntlich von demselben Metalle verfertigten Originale des Pariser Maafses, in jeder Wärme, das verlangte Verhältnifs habe; wogegen nicht unterlassen sein würde, eine die Wärme betreffende Angabe zu machen, wenn eine *Verschiedenheit* der normalen Wärme beider Originale beabsichtigt worden wäre. In den Jahren 1835 und 1837 habe ich das Preufsische Maafs mit dem Pariser Maafse wirklich verglichen, und dadurch gefunden, dafs das Verhältnifs beider, in der angegebenen Wärme, so nahe das verlangte ist, dafs auch diese Vergleichung keinen Zweifel an der Richtigkeit der Annahme veranlafst. Man kann also kaum unsicher sein, dafs die, wenn auch nicht in dem Gesetze ausgesprochene, normale Wärme des Preufsischen Original-Längenmaafses 13° der achtzigtheiligen, oder 16°,25 der hundertheiligen Thermometerscale entsprechen soll.

Indessen hat *Kater*, lange nach der Zeit der Verfertigung des Preufsischen Originalmaafses, eine Bemerkung gemacht, welche, wenn sie früher gemacht wäre, eine Bestimmung des Gesetzes, über einen jetzt zweifelhaft gelassenen Punkt, nothwendig gemacht haben würde. Er hat nämlich erinnert, dafs eine, auf einer Seitenfläche eines Stabes aufgetragene Entfernung, sich merklich verändern mufs, wenn der Stab eine, auch an sich selbst wenig bedeutende Krümmung annimmt; dafs also die unzweideutige Bestimmung dieser Entfernung eine Angabe über den Zustand fordert, in welchem der Stab sich befinden soll, indem man ihn anwendet. Dieser Bemerkung zufolge hätte festgesetzt werden müssen, entweder, *wie* der Stab auf den, zu seiner Vergleichung mit seinen Copien dienenden Apparat aufgelegt werden soll; oder, ob seine eingetheilte Oberfläche, während der Vergleichung, eine Ebene sein soll. Indem eine Festsetzung hierüber nicht vorhanden ist, so mufs man ihren Mangel, durch eine noch hinzuzufügende beseitigen. Bis dieses geschehen sein wird, ist aber das Original des Preufsischen Längenmaafses, innerhalb gewisser Grenzen, zweifelhaft.

Indem die Preufsische Maafs- und Gewichtsordnung fordert, dafs das Verhältnifs des Preufsischen Fufses zu der Secundenpendellänge von Berlin

Digitized by Google

bestimmt werde, setzt sie voraus, dafs man diese Länge entweder unmittelbar durch das Original des Preufsischen Längenmaafses messe, oder das Verhältnifs des dabei angewandten Maafses zu diesem, besonders ausmittele. Bei der von mir vorgenommenen Messung der Secundenpendellänge, ist das Original des Preufsischen Längenmaafses weder angewandt worden, noch konnte es angewandt werden; die dabei befolgte Methode beruhet wesentlich auf der Anwendung eines, durch die Entfernung seiner *Endflächen* bestimmten Maafses, und der zu ihrer Ausführung dienende, aus meiner Abhandlung über die früher, in Königsberg, gemachten Pendelversuche bekannte Apparat, ist auf die Anwendung einer Copie der *Toise du Pérou* eingerichtet. Es mufste also bestimmt werden, wie der Preufsische Fufs sich zu diesem Maafse verhält. — Zwar spricht das Gesetz die Absicht aus, ihn = 139,13 Linien dieses Maafses zu machen; allein es verordnet zugleich, dafs das von dem Ministerium der Finanzen und des Handels aufbewahrte Original desselben, die *einzige* Erklärung seiner Länge gebe. Hieraus folgt, dafs die Angabe von Pariser Linien nur eine *Absicht* ausspricht, über deren mehr oder weniger vollkommene Erreichung der *Erfolg* der wirklichen Verfertigung des Originals zu entscheiden hatte. Da, zur Zeit der Bestimmung der Pendellänge von Berlin, noch keine Vergleichung zwischen dem Preufsischen Fufse und der Toise du Pérou vorgenommen war, so mufste sie vorgenommen werden, was, wie ich schon angeführt habe, von mir geschehen ist. Dadurch hat sich gezeigt, dafs das Original des Preufsischen Längenmaafses, seiner *beabsichtigten* Länge dermafsen gleich kommt, dafs sich kein Unterschied zwischen beiden angeben läfst, welcher nicht in die Grenzen der Unsicherheit fiele, welche das Original selbst besitzt und mit welcher die Toise du Pérou und das daraus abgeleitete Méter, aus verschiedenen, davon vorhandenen Copien hervorgehen. Das Verdienst dieser, als vollständig anzusehenden Erreichung der Absicht, gebührt Herrn *Pistor,* der das Original des Preufsischen Längenmaafses verfertigt und durch den darin erlangten Erfolg, die Zweckmäfsigkeit der dazu getroffenen Einrichtungen und die Genauigkeit ihrer Ausführung ehrenvoll gerechtfertigt hat.

Als die Forderungen der Maafs- und Gewichtsordnung, welche bis zum Jahre 1835 unerfüllt geblieben waren, erfüllt werden sollten, wurde für angemessen erachtet, die Hinzufügung des Fehlenden mit Maafsregeln zu verbinden, geeignet, sowohl den kleinen Zweifel zu zerstreuen, welcher über

Digitized by Google

die Preufsische Maafseinheit noch vorhanden war, als auch den Nutzen ihrer Festsetzung zu vermehren. — Da die Einheit jedes Maafses, ihrem mathematischen Begriffe zufolge, *willkührlich* ist, so ist keinesweges beabsichtigt worden, an der durch das vorhandene Gesetz verlangten Länge des Preufsischen Fufses etwas zu ändern. Vielmehr war nur dafür zu sorgen, dafs seine Länge *unzweideutig*, und zwar nicht durch eine Maafseinheit des Auslandes, sondern durch ein in *Berlin* aufzubewahrendes Urmaafs, angegeben werde, und dafs dieses so eingerichtet sei, dafs weder die Zeit, noch Zufälligkeiten, auf deren gänzliche Entfernung von seiner Anwendung nicht gerechnet werden darf, seine Länge ändern können. Diese wesentlichen Erfordernisse des Urmaafses mufsten mit Anordnungen verbunden werden, welche eine Vervielfältigung seiner Länge gewähren; denn nur hierdurch, und nicht durch das Vorhandensein eines unzugänglichen Urmaafses, wird der Zweck seiner Einführung erreicht. Er wird desto vollständiger erreicht, je zugänglicher das Urmaafs selbst gemacht werden kann, ohne dafs daraus die Gefahr einer Veränderung desselben hervorgeht; so vollständig wie möglich aber, wenn die zur Vervielfältigung seiner Länge dienenden Mittel, sowohl die gröfste Leichtigkeit ihrer Anwendung, als auch die gröfste Genauigkeit gewähren, welche, bei dem Zustande der praktischen Mechanik jeder Zeit, erlangt werden können. — Dieser Ansicht bin ich, bei meinen Bemühungen um das Preufsische Längenmaafs, gefolgt; sie hat die Arbeiten erzeugt, deren Mittheilung gegenwärtig meine Absicht ist, deren näherer Darstellung ich jedoch einige Bemerkungen über die beiden gebräuchlichen Arten der Urmaafse, vorangehen lassen mufs.

Das Bedürfnifs der sicheren Bestimmung der Einheit eines Längenmaafses wurde zuerst fühlbar, als man in Frankreich die denkwürdigen Unternehmungen entwarf, welche *Bouguer* und *Condamine* unter den Äquator, und *Maupertuis* unter den Polarkreis führten. Damals wurden zwei, einander gleiche Exemplare der *Toise* verfertigt, nämlich Stäbe von Eisen, deren Endflächen die Entfernung erhielten, welche, von dieser Zeit an, als die Einheit des Französischen Längenmaafses angesehen worden ist. Diese Einheit wurde so gewählt, dafs sie mit der im Gebrauche befindlichen Toise so nahe übereinstimmte, als diese, bei der über sie stattfindenden Unsicherheit, erkannt werden konnte; also so, dafs die das Maafs anwendenden Künste und Gewerbe, dadurch keine Störung erfuhren, und der Vortheil, ein fest

Digitized by Google

bestimmtes Maafs zu besitzen, ohne das (in jedem Falle vermeidliche) Opfer einer Änderung des bestehenden, erlangt wurde. Die eine dieser Toisen ging durch Schiffbruch verloren; die andere, und zwar die unter dem Äquator angewandte, wurde aber unversehrt zurückgebracht, und die Länge, welche sie besitzt, indem sie sich in der Wärme von 13° des Réaumurschen Thermometers befindet, ist die, unter der Benennung *Toise du Pérou*, vorhandene Einheit des Französischen Maafses. Später wurde ein bestimmter Theil dieser Einheit, nämlich 443,296 solcher *Linien*, deren jene 864 besitzt, unter der Benennung *Méter*, als neue Maafseinheit eingeführt, und ebenfalls durch die Entfernung der beiden Endflächen eines Stabes erklärt. — Diese, in beiden französischen Maafssystemen eingeführte Art der Erklärung ihrer Einheiten, setzt zuerst voraus, dafs der Stab, welcher sie enthält, sich selbst nicht ändere; also nicht nur, dafs er gerade bleibe wenn er Anfangs gerade, und unveränderlich gekrümmt wenn er Anfangs nicht gerade war, sondern auch, dafs seine Endflächen nicht abgenutzt, oder anderweitig beschädigt werden; ferner setzt sie voraus, entweder, dafs die Entfernung der Endflächen allenthalben gleich sei, oder, dafs sie nur zwischen bestimmten Punkten derselben gemessen werde.

Die Einheit des Englischen Maafses wird dagegen durch die Entfernung zwischen zwei Punkten oder Strichen, welche auf die Oberfläche eines Stabes aufgetragen sind, erklärt. Unter der Annahme, dafs diese Begrenzungen des Maafses deutlich genug seien, um keinen erheblichen Zweifel über ihren beabsichtigten Ort übrig zu lassen, beruhet diese Erklärungsart des Maafses auf ähnlichen Voraussetzungen wie die vorige. Damit sie nicht zweifelhaft werde, mufs auch hier der Stab in seiner anfänglichen Beschaffenheit bleiben; die auf ihn aufgetragenen Punkte oder Striche müssen weder abgenutzt, noch anderweitig beschädigt werden; endlich müssen, falls Striche angewandt worden sind, diese entweder parallel sein, oder ihre Entfernung mufs nur an bestimmten Punkten gemessen werden.

Ein Urtheil über die Vorzüglichkeit der einen oder der anderen Art, die Einheit eines Längenmaafses zu erklären, kann nur auf einer Untersuchung beruhen, aus welcher hervorgeht, ob die gemeinschaftlichen Voraussetzungen beider, in dem Falle der einen sicherer und vollständiger rechtmäfsig gemacht werden können, als in dem Falle der anderen. Ich werde jede einzelne dieser Voraussetzungen weiter verfolgen.

Digitized by Google

Die Voraussetzung des unveränderten Zustandes des Längenaxe eines Stabes, wird offenbar desto sicherer erfüllt, je stärker der Stab der Biegung widersteht; also sowohl durch Vergrößserung der Dicke, als auch durch die Wahl eines stärkeren Materials des Stabes. Allein es ist unvortheilhaft, seine Dicke zu sehr zu vergrößsern, weil die Schwierigkeit, ihm in allen Theilen seiner Masse eine gleiche Wärme zu geben, dadurch zugleich vergrößsert wird. Die Veränderungen des anfänglichen Zustandes der Längenaxe des Stabes mögen aus Zufälligkeiten entstehen und bleibend sein, oder sie mögen aus der Wirkung der Schwere auf den, an zwei Punkten aufgelegten Stab, hervorgehen und sich also bei einer Änderung der Ruhepunkte ändern, so wird immer die Einrichtung den Vorzug verdienen, welche diesen Veränderungen den kleinsten Einfluſs auf das durch den Stab erklärte Maaſs einräumt. Offenbar ist hier die Erklärung des Maaſses durch die Entfernung der Endflächen des Stabes, im Vortheile vor seiner Erklärung durch die Entfernung zweier Punkte auf der Oberfläche desselben; denn die erstere wird, durch eine Krümmung, nur um eine Gröſse von der Ordnung ihres *Quadrats* geändert, während die letztere eine Änderung von der Ordnung des *Products* der Krümmung und der Entfernung der Punkte von der Axe des Stabes, erfährt. Die Krümmung, welche aus der Wirkung der Schwere auf den horizontal auf zwei Lager gelegten Stab hervorgeht, kann man durch Rechnung verfolgen, und dadurch die Art und Gröſse ihres Einflusses auf Maaſsstäbe von der einen, oder der anderen Einrichtung bestimmen. Da dieses bisher nicht geschehen, aber nothwendig ist, so habe ich in der *Beilage* I. dieser Abhandlung, die Veränderungen aufgesucht, welche sowohl die Entfernung der Endflächen eines Stabes, als auch die Entfernung zweier Punkte auf seiner Oberfläche erfährt, indem man ihn auf zwei, gleich weit von den Enden entfernte Unterlagen legt. Es geht daraus hervor, daſs die erstere, wenn der Stab an den vortheilhaftesten, 0,22031 seiner Länge von seinen Enden entfernten Punkten unterstützt wird, selbst wenn er die Länge einer Toise und die Dicke von 4,2 Lin. besitzt (welches die Dicke der zu meinen Pendelversuchen angewandten Toise ist), nur um eine unerhebliche Gröſse geändert wird; ein Stab von den oben angeführten Abmessungen des Originals des Preuſsischen Längenmaaſses, wird, selbst bei der unvortheilhaftesten Auflegungsart, d. h. bei der Unterstützung seiner Endpunkte, nur um 0‘,000189 verkürzt, und könnte daher, wenn er ein Endflächenmaaſs

Digitized by Google

wäre, als unabhängig von jeder Auflegungsart, nicht welche man wählen kann, sondern welche man zu wählen geneigt sein kann, angesehen werden. Legt man denselben Stab aber an den Punkten auf, an welchen sich die das Maafs bestimmenden Striche befinden, so verkürzt sich dieses um $0^{L},006482$; diese Verkürzung nimmt ab, so wie man die Unterlagen von den Enden entfernt und verschwindet gänzlich, wenn man sie um 0,2113 der Länge des Stabes davon entfernt hat; sie verwandelt sich in eine Verlängerung, wenn man die Unterlagen der Mitte der Stabes noch mehr nähert. Man kann auch für jeden Stab und jedes auf seiner Oberfläche verzeichnete Maafs, die Lage der Unterstützungspunkte so wählen, dafs das Maafs eben so grofs erscheint, als es erscheinen würde, wenn der Stab an allen Punkten, auf einer Ebene ruhete. Die von Herrn *Baily* gewählte Auflegung der röhrenförmigen Scale der Astronomischen Gesellschaft in London, auf 0,25 ihrer Länge von den Endpunkten entfernte Lager, verlängert die in ihrer Mitte verzeichneten 3 Englischen Fufs, um $0^{L},001952$; welche Verlängerung bei einer Entfernung der Lager von den Enden der Röhre, von 0,2230 der Länge, gänzlich verschwunden sein würde. Obgleich es am natürlichsten ist, für die Länge eines, auf der Oberfläche eines Stabes verzeichneten Maafses, die Entfernung anzunehmen, welche die dasselbe erklärenden Punkte in dem *geraden* Zustande des Stabes besitzen, so wird doch auch durch jede *bestimmte* Angabe der Auflegungsart der Zweifel über seine beabsichtigte Länge vermieden, so wie er, in dem Falle der eben erwähnten Scale, hierdurch vermieden worden ist. Für das Original des Preufsischen Längenmaafses fehlt, wie ich oben schon bemerkt habe, diese Bestimmung, und die jetzt mitgetheilte Zahlenangabe seiner Veränderungen zeigt, dafs der hieraus entstehende Zweifel nicht als unerheblich angesehen werden kann, indem Anwendungen vorkommen, in welchen ein oder zwei Tausendtel einer Linie nicht willkührlich bleiben sollen. Ich bemerke noch, dafs die Sagitte der Krümmung des Originals des Preufsischen Längenmaafses, bei seiner Auflegung an den Endpunkten, nur $0^{L},168$ beträgt. Eine Fläche, welche man zu seiner Unterlage wählen mögte, müfste also sehr genau eben sein, wenn man die aus der Krümmung hervorgehende Unsicherheit des Maafses, *dadurch* in sehr enge Grenzen einschliefsen wollte; auch müfste noch bestimmt ausgesprochen sein, ob die, selbst bei der Auflegung des Stabes auf eine ebene Fläche, vielleicht noch stattfindende Krümmung seiner Mittellinie, oder seiner das Maafs

Digitized by Google

tragenden Oberfläche, mechanisch, oder auch durch Messung der Krümmung und Rechnung, jedesmal wenn das Maafs von ihm entnommen wird, weggeschafft werden soll. Ein Mittel, Veränderungen der anfänglichen Figur, welche die Mittellinie des Stabes bei einer bestimmten Auflegungsart, in der Folge erleiden könnte, unschädlich zu machen, wäre, dafs man das Maafs auf zwei entgegengesetzte Flächen des Stabes und an sich einander entgegengesetzten Punkten, auftrüge und das Mittel aus den beiden, durch diese doppelte Auftragung gegebenen Bestimmungen desselben, für das wahre Maafs erklärte. Nicht genau diese, aber eine ähnliche Maafsregel, hat Herr *Baily* wirklich ergriffen. Übrigens hat *Kater* das sehr einfache Mittel angegeben, wodurch ein durch die Entfernung zweier Punkte auf einer Fläche bezeichnetes Maafs, eben so unempfindlich gegen kleine Krümmungen des Stabes gemacht werden kann, als ein durch die Entfernung der Endflächen bezeichnetes ist; es besteht darin, dafs das Metall des Staabes, an seinen Enden, zur Hälfte weggearbeitet wird, so dafs an jedem Ende eine Ebene entsteht, in welcher die Axe des Stabes liegt und auf welcher die das Maafs bestimmenden Punkte bezeichnet werden. —

Da man die Veränderungen eines, nach der Art des Englischen eingerichteten Maafses, welche zwischen verschiedenen Auflegungsarten stattfinden, immer *berechnen* und also seine Messungen immer auf einen bestimmten Zustand zurückführen kann, falls die zur Rechnung nöthigen Angaben bekannt sind, so ist es jedesmal möglich, die aus der Schwere entstehenden Veränderungen, durch anfängliche feste Bestimmungen, unschädlich zu machen. Dieses ist aber nicht der Fall bei den Änderungen, welche aus einer, durch Zufälligkeiten herbeigeführten, bleibenden Krümmung des Stabes entstehen. Auch hierdurch wird dieses Maafs soviel stärker geändert, als ein nach der Katerschen Art eingerichtetes, oder durch die Entfernungen von Endflächen gegebenes, dafs die letzteren als frei von einer Voraussetzung angesehen werden können, von welcher das erstere abhängig ist. Sie haben also hierin einen nicht zu bezweifelnden Vorzug.

Die Voraussetzung, dafs der Stab, an seinen Endflächen weder abgenutzt, noch anderweitig beschädigt werde, ist desto erlaubter, je härter und in jeder Beziehung unverderblicher seine Endflächen sind. Weniger dauerhafte Endflächen, z. B. von Eisen oder Platin, mögen durch Zufälligkeiten, auf deren gänzliche Entfernung von der Anwendung eines Maafses, nicht ge-

Digitized by Google

rechnet werden darf, leichter beschädigt werden können, als angemessen ist, für einen Stab, der die *einzige* Erklärung der Maaſseinheit, für eine unbestimmt fortgehende Zeit gewähren soll; allein wenn man dem Stabe so harte, und zugleich so fest mit seiner Masse verbundene Endflächen geben kann, daſs keiner der Körper, womit sie in Berührung kommen können, eine Änderung darin hervorbringen kann, so wird das dadurch erklärte Maaſs als die Voraussetzung erfüllend anzusehen sein. In wiefern der Versuch, ihm diese Eigenschaft zu ertheilen, gelungen ist, wird man aus der Beschreibung sehen, welche ich später, von den, durch die gegenwärtige Gelegenheit veranlaſsten Einrichtungen ertheilen werde. Daſs man auf die unbeschädigte Erhaltung sehr feiner, auf einen Stab verzeichneter Punkte oder Striche, eben so sicher rechnen könne, als auf die Unveränderlichkeit der von mir gewählten Endflächen von *Sapphir,* glaube ich nicht; vielmehr glaube ich, daſs man, durch die groſse Härte und Dauerhaftigkeit dieses Materials, den Vortheil erlangen kann, das Original eines Längenmaaſses den Vergleichungen weit zugänglicher zu machen, als man bei einem, durch Punkte oder Striche gegebenen wagen darf. Ich zweifle also nicht, daſs das erstere, auch in Beziehung auf die Dauer, in beträchtlichem Vortheile vor dem anderen ist.

Die Voraussetzung endlich, daſs das Original eines Längenmaaſses eine unzweideutige Bestimmung desselben ergebe, kann bei beiden Einrichtungen desselben, vollständig erfüllt werden. Es ist dazu nur nöthig, daſs bei dem Endflächenmaaſse die Punkte der Flächen, bei dem Strichmaaſse die Punkte der Striche, vorgeschrieben werden, zwischen welchen die Entfernung gemessen werden soll. Bei jenem ist es am natürlichsten, die in der Axe des Stabes liegenden zur Erklärung des Maaſses zu wählen; wenn der Stab ein recht- oder schiefwinklichtes Parallelogramm zum Durchschnitte hat, erkennt man sie sehr leicht durch seine Umwendung auf einer Ebene, indem man zuerst eine seiner Kanten, dann die ihr entgegengesetzte, in eine und dieselbe gerade Linie bringt.

Als noch einen Vorzug der Erklärung der Einheit eines Längenmaaſses, durch die Entfernung der Endflächen eines Stabes, betrachte ich die leichtere, oder in kürzerer Zeit erreichbare Genauigkeit seiner Vergleichung mit davon genommenen Copien. Das schärfste Messungsmittel, welches wir jetzt kennen, beruhet auf der richtigen Anwendung des Repsoldschen, mit einer Wasserwage versehenen Fühlhebels; es äuſsert seine Wir-

Digitized by Google

kung nur wo etwas zu *berühren* ist, also nur bei einem Endflächenmaafse. Wenn man von einem solchen und von einem Strichmaafse, *gleich genaue* Copien verlangt, so können die ersteren leichter, d. h. in kürzerer Zeit, erlangt werden; also auf eine, der Erreichung der Absicht der Einführung einer festbestimmten Einheit des Maafses, nämlich seiner Verbreitung durch Copien des Originals, förderlichere Art. Auch lasse ich nicht unerwähnt, dafs Endflächenmaafse gerade die sind, welche sich zur Anwendung auf Messungen, von denen man die gröfste Genauigkeit fordert, vorzugsweise eignen; dafs dieses wenigstens meine Meinung ist, geht daraus hervor, dafs ich meinen Apparat zur Bestimmung der Pendellänge, auf dieses Princip gegründet habe. Dafs zu gewissen Messungen Eintheilungen eines Maafses nothwendig sind, will ich keinesweges verneinen; aber die vortheilhafteste Einrichtung des *Originals* eines Maafses schliefst die Verfertigung von danach eingetheilten Scalen nicht aus, und würde selbst dann nicht aufgeopfert werden dürfen, wenn das Endflächenmaafs schwieriger auf eine Scale zu übertragen wäre, als eine Scale auf die andere. Dieses letztere ist aber nicht einmal der Fall; ich zweifle nicht, dafs z. B. die von mir, zu diesem Zwecke angewandten Apparate, welche ich an dem gehörigen Orte dieser Abhandlung beschreiben werde, die Leichtigkeit der Anwendung mit der Güte ihres Resultats vereinigen. Herrn *Baily's* neue Erfahrungen geben endlich noch einen Grund, die Endflächenmaafse vorzuziehen, wenn es sich um die Erklärung der Einheit eines Maafssystems handelt; es hat sich nämlich dabei gezeigt, dafs die Striche einer Scale, von verschiedenen Beobachtern, an verschiedenen Punkten gesehen werden, so, dafs ein Mikroskop nicht von Allen *gleich* darauf eingestellt wird und dafs der Unterschied aufserhalb der Grenze der zufälligen Unvollkommenheiten des Sehens liegt. Man müfste die Ursache hiervon, oder wenigstens die Art ihres Einflusses näher kennen, wenn man sicher werden wollte, dafs sie keine *Unbestimmtheit* des Strichmaafses erzeugt.

Aus den auseinandergesetzten Gründen für ein Endflächenmaafs geht hervor, dafs die oben schon angeführte Absicht, die Preufsische Maafseinheit sowohl ganz unzweideutig zu machen, als ihre Anwendbarkeit zu befördern, nur erreicht werden konnte, indem man ein neues, dem gesetzlichen Originale, innerhalb der Grenzen seiner Unsicherheit, dem Gesetze selbst aber völlig entsprechendes Urmaafs *dieser* Art verfertigte, und Maafs-

B 2

Digitized by Google

regeln ergriff, welche Copien desselben, mit Leichtigkeit und Sicherheit ergeben können. Allein wenn die Vergleichung einer Copie mit dem Originale vollständige Befriedigung gewähren soll, so mufs sie die Länge der ersteren, in der Temperatur ergeben, in welcher die Vergleichung vorgenommen ist; man mufs also die Länge des Originals für alle Temperaturen kennen, in welchen Copien verglichen werden können, d. h. man mufs auch seine Ausdehnbarkeit durch die Wärme kennen, also eine eigne Untersuchung über dieselbe durchführen. Dem Besitzer einer Copie mufs es aber überlassen bleiben, *ihre* Ausdehnbarkeit durch die Wärme, selbst zu bestimmen, so wie alle übrigen Mittel zu ihrer Anwendung, nach eigenem Ermessen zu wählen.

Nimmt man alles, was ich über das Preufsische Längenmaafs gesagt habe, zusammen, so bemerkt man, dafs die Absicht, diesen Gegenstand gänzlich in Ordnung zu bringen, erforderte, dafs

1) das Original vom Jahre 1816, mit seinen drei officiellen Copien, und ferner
2) mit dem Französischen Fufse verglichen wurde; dafs
3) ein neuer, dem Gesetze vom 16. Mai 1816 entsprechender, aber jede Zweideutigkeit über die Einheit des Preufsischen Längenmaafses entfernender, dauerhafter, und in der Folge als Original anzusehender Maafsstab verfertigt,
4) seine Ausdehnbarkeit durch die Wärme untersucht, und
5) seine Länge mit dem Französischen Fufse verglichen wurde; endlich, dafs
6) Maafsregeln ergriffen wurden, durch welche die Erlangung von Copien des Originals leicht und sicher wird.

Ich werde in eben so vielen Abschnitten dieser Abhandlung zeigen, wie ich diese sechs Forderungen zu erfüllen gesucht habe. Dafs ich im Stande gewesen bin, dieses, mir von der Königlichen Verwaltung für Handel, Fabrication und Bauwesen übertragene Geschäft, in einer Ausdehnung auszuführen, welche sich über Alles, meiner Meinung nach, dabei Wesentliche erstreckt, verdanke ich nur der Bereitwilligkeit der genannten hohen Behörde, meine Wünsche zu unterstützen. Ich kann meine, diesen Gegenstand betreffenden Arbeiten, nicht zur öffentlichen Kenntnifs bringen, ohne diese Unterstützung, für welche ich dem Königlichen wirklich-geheimen

Digitized by Google

Ober-Regierungs-Rathe Herrn *Beuth* verpflichtet bin, mit dem gröfsten Danke anzuerkennen.

Nächst dieser Unterstützung meiner Arbeiten, mufs ich der Hülfe gedenken, welche ihnen durch Herrn *Baumann* zu Theil geworden ist. Ihm verdanke ich nicht nur die Verfertigung aller Apparate, welche ich benutzt habe, sondern auch die bereitwilligste und schnellste Befriedigung der zahlreichen kleineren Bedürfnisse, welche nie verfehlen, sich in dem Laufe von Arbeiten zu zeigen, die nicht einer durch Vorgänger geebneten Bahn folgen. Die Resultate solcher Arbeiten zeigen, indem sie nur in ihrer endlichen Form hervortreten, keine Spur der Schwierigkeiten, welche zu beseitigen waren, ehe sie dahin gelangten; aber wer sich je in dieser Art versucht hat, wird die Gröfse des Vortheils zu würdigen wissen, den ich aus der immer bereiten Unterstützung eines talentvollen Künstlers habe ziehen können. Die Leistungen der Baumannschen Apparate, welche ich jetzt bekannt zu machen im Begriffe bin, können das Urtheil über ihre *Ausführung* feststellen; ich halte für unnöthig, ihrem unzweideutigen Ausspruche etwas hinzuzusetzen.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Vergleichung der gesetzlichen Copien des Originals des Preufsischen Längenmaafses mit dem Originiale selbst.

§. 1.

Beschreibung des Apparates.

Der Apparat ist so eingerichtet, dafs er nicht allein die Vergleichung der drei Copien mit dem Originale des Preufsischen Längenmaafses vom Jahre 1816, sondern auch die Vergleichungen des letzteren und des neuen Etalons dieses Maafses mit der Toise, so wie auch verschiedener Copien der Toise untereinander, ergeben sollte. Indem ich ihn, der ersteren Anwendung wegen, gegenwärtig beschreibe, mufs ich über dieselbe hinausgehen und seine verschiedenen Anwendungen zugleich erläutern.

Die Vergleichungen von Längenmaafsen untereinander erfahren eine beträchtliche Schwierigkeit durch die schwer, und ohne besondere Maafsregeln nur mit unzureichender Annäherung zu erlangende Kenntnifs ihrer Wärme. Soll indessen die Ausdehnbarkeit der miteinander zu vergleichenden Maafse durch die Wärme, als *gleich* angenommen werden, und sind ihre Breiten und Dicke nicht so verschieden, dafs man eine Ungleichheit des Einflusses der täglichen Veränderungen der Wärme fürchten dürfte, so ist nicht die Kenntnifs, sondern nur die Gleichheit ihrer Wärme erforderlich, und man *vermeidet* die Schwierigkeit, indem man die Maafse, vor ihrer Vergleichung, hinreichend lange nebeneinder liegen läfst, um auf die Verschwindung eines anfänglichen Unterschiedes rechnen zu können. Die Maafse, welche, mittelst des Apparates, miteinander verglichen werden sollten, sind aber nicht den Bedingungen entsprechend, unter deren Voraussetzung das Nebeneinanderlegen zureichend sein kann; auch mufste man fürchten, dafs der Einflufs der Wärme des Körpers des Beobachters, sowohl auf die Maafse selbst, als auf den Apparat, Fehler erzeugen werde, welche die gehoffte Feinheit der Messungen wesentlich beeinträchtigen konnten. Aus diesem

Digitized by Google

Grunde entschlofs ich mich, alle Messungen unter der Oberfläche einer Flüssigkeit vorzunehmen; denn diese bringt eine, ohne Vergleich viel stärkere Ausgleichung der Wärme hervor, als die umgebende Luft und die Strahlung. Alle in Betracht kommende Theile, sowohl die zu vergleichenden Maafse, als auch die zu ihrer Vergleichung dienenden Einrichtungen, befinden sich daher fortwährend unter Weingeist. Taf. I Fig. 1 zeigt, auf dem 8 Zoll starken Balken von Mahagoniholz, welcher alles dieses trägt, einen aus Glastafeln zusammengesetzten Kasten, welcher, während der Versuche, so hoch mit *Weingeist* gefüllt ist, dafs alles darin enthaltene sich hinreichend tief unter seiner Oberfläche befindet. *Wasser* würde weniger unangenehm gewesen sein, als der sich stark verflüchtigende Weingeist; allein sein nachtheiliger Einflufs auf das Eisen und den Stahl mufste vermieden werden.

Was der Apparat leisten mufste, war die Vergleichung verschiedener Copien der Toise du Pérou untereinander, einer von ihnen mit dem Originale des Preufsischen Längenmaafses von 1816 und mit dem neuen Etalon, und des ersteren mit seinen vorhandenen Copien. Er mufste also die Mittel gewähren, Maafse miteinander zu vergleichen, welche ganz verschiedene Längen besitzen und theils durch ihre Endflächen, theils durch Striche auf ihrer Oberfläche bestimmt sind. In dem ersten dieser Fälle wird es nöthig, die Endflächen mit den, die Messung vermittelnden mikrometrischen Einrichtungen in *Berührung* zu bringen; in dem anderen mufs das *Sehen durch Mikroskope* die Berührung ersetzen. Ich glaube den Apparat am deutlichsten beschreiben zu können, wenn ich zuerst nur den Theil seiner Einrichtung berücksichtige, welcher bei der Vergleichung verschiedener Copien der Toise allein in Betracht kommt; dann das was diesem hinzugefügt sein mufs, um auch das neue Etalon mit der Toise vergleichen zu können; endlich die mikroskopische Einrichtung, welche die Vergleichung von Strichmaafsen, sowohl untereinander, als auch mit der Toise, möglich macht.

Das Lager, in welches die Toise gelegt wird, wenn sie zwischen die Mikrometer des Apparates gebracht werden soll, befindet sich auf einer Platte von Messing, welche auf fünf, durch den Boden des Glaskastens hindurch, auf den Balken von Mahagoniholz aufgeschraubten Brücken ruhet. Diese Brücken xx und die Platte bb sind Taf. II Fig. 7 in ihrem Durchschnitte, in etwa halber Gröfse, dargestellt. Die letztere hat 6 Fufs 8 Zoll

Digitized by Google

Länge; sie ist durch Zug und Druckschrauben mit den einzelnen Brücken verbunden, so daſs fünf Punkte derselben in eine gerade Linie gelegt werden können. Dieses wird durch die Ausspannung einer Drahtsaite beurtheilt, welche man in *ss* Fig. 2 sieht und deren Befestigungspunkte sich an zwei Klemmen *tt* (gröſser dargestellt Taf. III Fig. 18 und 19) befinden: wenn die Saite gespannt ist, wird ein, in einem sehr spitzen Winkel geschliffener Keil zwischen sie und die Platte geschoben, welcher die Gleichheit oder Ungleichheit der Entfernungen beider, an den 5 Punkten, anzeigt und also das Mittel zur Verbesserung einer Ungleichheit derselben gewährt. Auf der Oberfläche der Platte befinden sich zwei, ihrer ganzen Länge folgende Hervorragungen *aa* (Fig. 2, 7, 14, 15), in deren inneren Raum dieselbe Copie der Toise du Pérou genau paſst, welche der Bestimmung der Pendellängen von Königsberg, Güldenstein und Berlin, so wie auch der, in der Nähe von Königsberg gemessenen Grundlinie eines Dreiecksnetzes zum Grunde liegt. Die Toise wird, etwa symmetrisch gegen beide Enden des Apparates, also so aufgelegt, daſs etwa 4 Zolle an jedem Ende ihres Lagers unbedeckt bleiben. —

In der Mitte des Lagers für die Toise befindet sich die, seiner ganzen Länge folgende Vertiefung *c* (Fig. 7, 14, 15), von deren verschiedenen Anwendungen ich jetzt nur die, sich auf die Messung der *Toise* beziehende berühren werde. Der mikrometrische Apparat wird nämlich nicht unmittelbar mit einer der Endflächen derselben in Berührung gebracht, sondern mit dem kegelförmig zugespitzten und an der Spitze abgerundeten Ende eines Cylinders von Stahl, welcher auf den Rändern der Vertiefung aufliegt, und dessen anderes, kugelförmig gekrümmtes Ende die Endfläche der Toise berührt. Dieser Cylinder *l* (Fig. 2, 5, 6, 7, 9, 14) liegt so auf beiden Rändern der Vertiefung, wie Fig. 7 zeigt; die scharfen Kanten dieser Ränder sind, mittelst eines Cylinders von gleichem Durchmesser mit dem vorigen, weggeschliffen, so daſs sie eine, aus zwei schmalen Streifen der Cylinderfläche gebildete *Bahn* geworden sind, in welcher der Cylinder *l* sicher und sanft verschoben und dadurch in Berührung mit der Toise gebracht werden kann. Die 2te Fig. zeigt die beiden, für beide Endflächen der Toise erforderlichen Cylinder (*l*) in ihrer Bahn liegend; ihr Durchmesser ist so bestimmt, daſs ihre Axe in derselben Höhe ist, in welcher die Axe der, in ihrem Lager liegenden Toise sich befindet, wozu eine Gröſse desselben von 10 Pariser Li-

Digitized by Google

nien erforderlich war; ihr vorderes Ende ist ein Kugelsegment von 8,5 Lin. Halbmesser, ihr hinteres, das Mikrometer berührendes, gehört zu einer sehr kleinen Kugel; die Mittelpunkte der Kugeln, zu welchen diese Segmente gehören, befinden sich, wenigstens sehr nahe, in den Axen der Cylinder. Man kann sich hiervon überzeugen, indem man den Cylinder vor das Mikrometer und seine vordere Fläche mit einem festen Punkte aufser seiner Axe in Berührung bringt, dann aber das Mikrometer, während der Drehung des Cylinders um seine Axe, beobachtet. Wenn diese Cylinder nur mit ebenen, auf ihre Axe senkrechten Flächen, in Berührung gebracht werden sollten, so könnte es unerörtert bleiben, ob die Mittelpunkte ihrer Kugelflächen in ihrer Axe liegen; man wird aber später sehen, dafs auch Anwendungen vorkommen, in welchen zwei convexe Flächen sich berühren, in welchen also die Nichterfüllung dieser Bedingung Fehler erzeugen würde. Ich bemerke noch, dafs eine vollständige Vergleichung zweier Copien der Toise, *zwei* Auflegungen derselben erfordert, zwischen welchen die oberen Oberflächen zu unteren gemacht werden; nur dadurch wird das Resultat von der Voraussetzung des Parallelismus der Endflächen, in dem Falle des nicht völligen Zusammenfallens der Längenaxen der Toisen mit der Axe der Cylinder, befreiet.

Eins der Mikrometer an beiden Enden des Apparats ist Taf. III Fig. 14 gezeichnet. Beide sind auf dem Balken von Mahagoniholz befestigt, auf Messingstücken, welche durch den Boden des Glaskastens hindurchgehen, ohne ihn zu berühren; die Zwischenräume zwischen beiden sind, durch untergelegte Stücken von Cautschuk, gegen das Durchfliefsen des Weingeistes verdichtet. Die befestigte, untere Platte des Mikrometers trägt die Bahn eines Schlittens *f* (Fig. 2, 14) dessen Durchschnitt Fig. 17 gezeichnet ist, und welcher durch die Mikrometerschraube *g* (Fig. 3, 8, 14, 17) bewegt wird; die beiden Cylinder *hh* sind mit Federn umwunden, welche den Schlitten vorwärts drücken und dadurch den todten Gang der Schraube vernichten. Die ganzen Drehungen werden durch die Eintheilung *i* (Fig. 14) gezählt, ihre Hundertel durch die Trommel *k* der Schraube und den Index *n* (Fig. 3, 6, 8, 14). Auf dem Schlitten befindet sich das Lager (*o*) der Axe (*p*) der Wasserwage (*q*) (Fig. 6, 14, 17), welcher, durch ein Gegengewicht (*r*) (Fig. 6, 14) ein kleines, sie nach seiner Seite drehendes Übergewicht gegeben wird. An der Drehungsaxe *p* der Wasserwage ist eine kleine Stahl-

Digitized by Google

platte *u* (Fig. 5) angebracht, welche, durch die vorwärts gerichtete Bewegung des Schlittens, mit dem kegelförmigen Ende des, in seiner Bahn liegenden und mit dem anderen Ende die Toise berührenden Cylinders *l* in Berührung kommt, und bei fortgesetzter Bewegung die Wasserwage um ihre Axe drehet, so dafs das Einspielen ihrer Blase erfolgt. Die gezahnten Räder *v* und *w*, deren Anbringungsart Fig. 3, 6 zeigen, bezwecken nur die bequemere Drehung der Mikrometerschraube.

Die bis jetzt beschriebenen Theile des Apparats sind die bei der Vergleichung verschiedener Exemplare der Toise allein in Betracht kommenden. Um auch das neue Endflächenmaafs von 3 Preufsischen Fufsen mit der Toise vergleichen zu können, mufs der Apparat die Mittel gewähren, sowohl dieses Maafs zu verdoppeln, als auch den Überschufs der Toise über seine doppelte Länge, von etwa 28,8 Pariser Linien, zu messen. Beides wird durch zwei Cylinder von Stahl möglich, welche gleiche Durchmesser mit den Cylindern *l* haben und an dem einen Ende, wie diese, kugelförmig, an dem anderen aber eben abgeschliffen sind. Taf. I Fig. 2 und Taf. III Fig. 15 zeigen einen dieser Cylinder, nahe an der Mitte des Apparates festgeklemmt; den anderen zeigt die erste dieser Figuren lose auf der Bahn liegend; ich werde sie *Anschiebe-Cylinder* nennen und durch die Bezeichnungen *A* und *B*, welche darauf eingestochen sind, unterscheiden. Mit der Hülfe dieser Anschiebe-Cylinder erhält man die Verdoppelung des Etalons sehr leicht: man legt dasselbe nämlich so in die, seine Breite besitzende Vertiefung *c*, dafs sein eines Ende mit dem Mikrometer an einem Ende des Apparats in Berührung gebracht werden kann, schiebt dann einen der Anschiebe-Cylinder (z. B. *A*) an das andere Ende desselben und klemmt ihn in dieser Lage fest; darauf nimmt man das Etalon ab, schiebt das convexe Ende von *B* an das ähnliche von *A*, klemmt den ersteren und nimmt den letzteren weg; endlich legt man das Etalon so in sein Lager, dafs es das convexe Ende des, jetzt festen, *B* berührt. Die hierdurch erlangte Verdoppelung des Etalons läfst die Länge der Anschiebe-Cylinder willkürlich; man kann sie aber so wählen, dafs auch die Forderung, den Überschufs der Toise über das verdoppelte Etalon zu messen, dadurch erfüllt werden kann. Giebt man nämlich jedem derselben die Länge von etwa $\frac{1}{30}$ Toise $= 28\overset{l}{,}8$, so wird die Summe der doppelten Länge des Etalons und der einfachen des Anschiebe-Cylinders der Toise nahe gleich; legt man daher den frei gewor-

Digitized by Google

denen Anschiebe-Cylinder A, mit seinem convexen Ende, an das schon verdoppelte Etalon, so kann man sein ebenes Ende mit dem Mikrometer in Berührung bringen, also $2E+A$ mit der Toise vergleichen. Eben so kann man, indem man zuerst B festklemmt, auch $2E+B$, und indem man das Mittel beider nimmt, $2E+\frac{1}{2}(A+B)$, mit der Toise vergleichen. Die noch unbekannte Länge $\frac{1}{2}(A+B)$ wird aber bestimmt, indem man beide Cylinder in ihrer Bahn so oft an einander schiebt, als sie in der Toise enthalten sind. Diese Art, beide Maafse miteinander zu vergleichen, gewährt den wesentlichen Vortheil, von jedem fremden Hülfsmittel unabhängig zu sein. Dafs sie nicht allein auf das Verhältnifs des Preufsischen und des Französischen Maafses, sondern auch auf andere Verhältnisse anwendbar ist, sieht man ohne Erinnerung; wäre z. B. das Preufsische Maafs mit dem Meter zu vergleichen, so müfste man jeden der Anschiebe-Cylinder etwa $= 26^{l},08$ machen, wodurch er 17 Mal in der Länge des Meters enthalten sein würde; die halbe Summe $\frac{1}{2}(A+B)$ erhielte man dann durch das Mittel aus zwei Reihen von Anschiebungen der Cylinder aneinander, deren eine mit A, die andere mit B anfinge. Zur Beurtheilung der Genauigkeit, womit das Anschieben bewirkt werden kann, werden die später mitzutheilenden Beobachtungen die Data gewähren.

Es sind noch die Theile des Apparates zu beschreiben, welche er, der Vergleichungen der *Strichmaafse* wegen besitzt. Es sind dieses die beiden, Taf. II Fig. 12 und 13 abgebildeten Mikroskope, deren ersteres an einem, in das Lager der Toise passenden Fufse aufgestellt ist, und ein bewegliches Fadenkreuz in dem Brennpunkte seines Oculars hat; das letztere ist, mittelst zweier Arme, an einen Stahl-Cylinder befestigt, dessen Durchmesser der allgemeine Durchmesser aller Cylinder des Apparats ist und dessen Endflächen eben sind. Wenn dieser Cylinder in die Bahn gelegt wird, so bedarf das Mikroskop noch eines Unterstützungspunktes, damit seine Axe senkrecht auf die Ebene gerichtet sei, in welcher die Oberflächen der zu vergleichenden Maafsstäbe liegen; dieses ist der, mit einer Rolle versehene Fufs, welcher auf die Platte gestellt wird und dann, nach gehöriger Berichtigung seiner Schraube, der Axe die beabsichtigte Richtung giebt. Dieses Mikroskop hat kein Fadenkreuz in seinem Brennpunkte, sondern seine Absehenslinie wird durch einen Index (y) bestimmt, welcher sich zwischen zwei Schraubenspitzen drehet und auf die Oberfläche des Maafsstabes nieder-

Digitized by Google

gelegt wird, so dafs ein feiner, darauf gezogener Strich mit dem Striche des Maafsstabes zusammenfallend gemacht werden kann. Bei der Anwendung dieser Einrichtung zur Vergleichung des Preufsischen Originalmaafses von 1816 mit der Toise legt man den Cylinder dieses Mikroskops so in die Bahn, dafs die eine seiner ebenen Flächen sich da befindet, wo man die Messung anfangen will; dann schiebt man den, der Bahn parallel, auf die Platte *bb* des Apparats gelegten Maafsstab so, dafs sein Anfangsstrich mit dem Indexstriche des Mikroskops zusammentrifft und stellt das bewegliche Fadenkreuz des anderen Mikroskops über den Endstrich des Maafsstabes. Verschiebt man, nachdem man das Mikrometer des Apparats, mittelst des, wie immer, zwischenliegenden Cylinders *l* mit der ihm zugewandten Endfläche des Mikroskop-Cylinders in Berührung gesetzt hat, den Maafsstab um seine ganze Länge, so dafs sein Anfangsstrich am Fadenkreuze des zweiten Mikroskops erscheint, so ist sein Endstrich um die doppelte Länge des Maafses von der Absehenslinie des ersten Mikroskops entfernt; nimmt man dieses weg, und stellt man es über dem Endstriche des Maafses wieder auf, so hat seine Absehenslinie sich durch dieselbe Entfernung bewegt, und diese Bewegung ist es auch, welche, wenn die Bahn vollkommen gerade ist, die Endflächen des, das Mikroskop tragenden Cylinders erfahren haben. Man fügt ihr die Länge des einen Anschiebe-Cylinders hinzu, indem man das convexe Ende des andern mit dem ebenen des Mikroskop-Cylinders in Berührung bringt, diesen wegnimmt und, statt seiner, den ersten Anschiebe-Cylinder auflegt. — Die hierdurch erlangte Vergleichung der Summe der doppelten Länge des Maafsstabes und des Anschiebe-Cylinders, mit der Toise, beruhet auf der Voraussetzung der vollkommen geraden Richtung der Bahn; man bemerkt sehr leicht, dafs eine kleine Abweichung von dieser Voraussetzung schon hinreicht, die Bewegung der Endflächen des Mikroskop-Cylinders von der Bewegung der Absehenslinie, welche man hätte messen sollen, verschieden zu machen; denn wenn der Winkel, in welchem die Richtungen der Bahn, an den Stellen, wo das Mikroskop am Anfange und am Ende steht, durch i und die Entfernung seiner Absehenslinie von der Mitte der Bahn durch e bezeichnet werden, so ist der Unterschied beider Bewegungen $= i \sin e$, woraus, bei dem stattfindenden Werthe von e, von etwa 18 Lin. hervorgeht, dafs $i = 11'',5$ schon hinreicht, einen Fehler von $0^{l},001$ zu erzeugen. Bis auf solche Kleinigkeiten kann man, trotz alles auf

Digitized by Google

die Arbeit gewandten Fleifses, die Bahn nicht als gerade annehmen. Allein jeder Einflufs ihrer Krümmung wird *vollständig* vermieden, wenn die Messung bei der Auflegung des Maafsstabes auf *beiden* Seiten der Bahn wiederholt, und aus den Resultaten beider das Mittel genommen wird. Dieselbe Combination von zwei Messungen, vor und nach einer Umwendung des Endflächenmaafses, ist gleichfalls nothwendig, wenn die Voraussetzung des Zusammenfallens seiner Axe mit der Axe der Cylinder, aus dem Resultate geschafft werden soll. Zwischen den Vergleichungen des Endflächen- und des Strich-Maafses mit der Toise ist also kein anderer Unterschied, als der dadurch nothwendig werdende, dafs bei der einen Flächen *berührt,* bei der anderen Striche *gesehen* werden müssen.

Wenn zwei Strichmaafse miteinander verglichen werden sollen, besteht das Verfahren ganz einfach in der Aufstellung des mit einem Fadenkreuze versehenen Mikroskops in dem Lager der Toise, in der Auflegung des Maafsstabes, so dafs sein Endstrich unter dem Fadenkreuze erscheint, in der Auflegung und dem Anfangsstriche entsprechenden Verschiebung des Cylinder-Mikroskops und in der Berührung seines Cylinders durch das Mikrometer; dieses Verfahren wird auf beide, miteinander zu vergleichende Maafsstäbe angewandt, während das erste Mikroskop unverrückt stehen bleibt. — Um das, bei der Messung der Strichmaafse nothwendige Verschieben derselben und des Cylinder-Mikroskops zu erleichtern, hatte Hr. *Baumann,* auf meine Bitte, eine Schrauben-Vorrichtung gemacht; sie ist aber nicht benutzt worden, weil es sich bei den Messungen selbst fand, dafs selbst die feinsten Bewegungen, durch kleine Stöfse mit einem Stücke Messing, gegen den zu verschiebenden Gegenstand geführt, mit vollkommener Sicherheit und bequemer als durch die Schraube, bewirkt werden konnten.

§. 2.

Anwendung des Apparats zur Vergleichung der Copien mit dem Originale des Preufsischen Längenmaafses von 1816.

Indem das Verfahren, welches ich bei dieser Vergleichung beobachtet habe, schon im vorigen Paragraphen beschrieben worden ist, darf ich nur noch Weniges darüber anführen. Der Glaskasten war, wie bei allen Anwendungen des beschriebenen Apparates, mit Weingeist gefüllt, und es

Digitized by Google

befanden sich zwei Thermometer in demselben, deren Angaben durch häufige Vergleichungen mit zwei anderen, nach meiner bekannten Methode geprüften und berichtigten, auch in Beziehung auf ihre Eispunkte neu untersuchten Normalthermometern der Königsberger Sternwarte, verbessert wurden. Die Vergleichungen wurden in der Ordnung gemacht, dafs erst das Original, dann die Copie, dann diese zum zweitenmale und endlich wieder das Original gemessen wurden; die Absicht dieser Verdoppelung der zu Einem Resultate verbundenen Vergleichungen war, die kleinen Veränderungen der Wärme des Weingeistes unschädlich zu machen, welche während der Dauer des Versuches stattfinden konnten.

Solcher doppelter Vergleichungen habe ich, für jede der Copien, 10 gemacht. Um diese später von einander unterscheiden zu können, sind sie nachträglich durch die Buchstaben *A*, *B*, *C* bezeichnet worden, nämlich die Copie der Königl. Akademie der Wissenschaften durch *A*, die der Königl. Ober-Bau-Deputation durch *B*, die des Königl. Kammergerichts durch *C*. Die Vergleichungen habe ich im August 1835, in Berlin, in dem, Behufs der Pendelversuche erbauten Hause, gemacht. Sie haben Folgendes ergeben:

A. *der Königlichen Akademie der Wissenschaften zugehörig:*

Nr.	Temperatur	Mikrometer		Unterschied *A* – *O*		
	C	Original	Copie	Theile des Mikrometers		Preufs. Linien
1	17°,76	20R,129	20R,138	— 0R,009	— 0R,0055	— 0L,0007
	17,86	20,131	20,133	— 0,002		
2	17,76	20,141	20,131	+ 0,010	+ 0,0025	+ 0,0003
	17,86	20,133	20,138	— 0,005		
3	17,76	20,125	20,132	— 0,007	— 0,0055	— 0,0007
	17,86	20,130	20,134	— 0,004		
4	17,86	20,140	20,126	+ 0,014	— 0,001	— 0,0001
	17,96	20,113	20,129	— 0,016		
5	17,86	20,129	20,124	+ 0,005	+ 0,0075	+ 0,0009
	17,96	20,133	20,123	+ 0,010		
6	17,91	20,130	20,125	+ 0,005	+ 0,0005	+ 0,0001
	18,01	20,114	20,118	— 0,004		
7	17,96	20,129	20,131	— 0,002	+ 0,004	+ 0,0005
	18,06	20,122	20,112	+ 0,010		
8	18,06	20,102	20,111	— 0,009	+ 0,0005	+ 0,0001
	18,26	20,119	20,109	+ 0,010		

Digitized by Google

Nr.	Temperatur t	Mikrometer Original	Mikrometer Copie	Unterschied $A-O$ Theile des Mikrometers		Unterschied $A-O$ Preuss. Linien
9	18°,16	20^{R},108	20^{R},107	+ 0^{R},001	— 0^{R},010	— 0^{L},0012
	18,26	20,105	20,126	— 0,021		
10	18,26	20,126	20,120	+ 0,006	+ 0,0055	+ 0,0007
	18,36	20,124	20,119	+ 0,005		
Mittel..........	18,00	*A — O*	....	....	=	0^{L},0000

B. *der Königlichen Ober-Bau-Deputation zugehörig:*

Nr.	Temperatur t	Mikrometer Original	Mikrometer Copie	Unterschied $B-O$ Theile des Mikrometers		Unterschied $B-O$ Preuss. Linien
1	20°,36	19^{R},719	19^{R},743	— 0^{R},024	— 0^{R},025	— 0^{L},0031
	20,46	19,709	19,735	— 0,026		
2	20,46	19,718	19,752	— 0,034	— 0,026	— 0,0032
	20,66	19,707	19,725	— 0,018		
3	20,56	19,709	19,742	— 0,033	— 0,022	— 0,0027
	20,76	19,717	19,728	— 0,011		
4	20,76	19,711	19,717	— 0,006	— 0,0255	— 0,0032
	20,86	19,672	19,717	— 0,045		
5	20,76	19,691	19,716	— 0,025	— 0,018	— 0,0022
	20,86	19,690	19,701	— 0,011		
6	20,76	19,671	19,691	— 0,020	— 0,0125	— 0,0015
	20,86	19,702	19,707	— 0,005		
7	17,71	20,147	20,163	— 0,016	— 0,0195	— 0,0024
	17,81	20,127	20,150	— 0,023		
8	17,56	20,132	20,160	— 0,028	— 0,017	— 0,0021
	17,76	20,149	20,155	— 0,006		
9	17,66	20,149	20,148	+ 0,001	— 0,006	— 0,0007
	17,81	20,135	20,148	— 0,013		
10	17,76	20,127	20,144	— 0,017	— 0,013	— 0,0016
	17,86	20,135	20,144	— 0,009		
Mittel..........	19,50	*B — O*	....	....	=	— 0^{L},0023

C. *dem Königlichen Kammergerichte zugehörig:*

Nr.	Temperatur t	Mikrometer Original	Mikrometer Copie	Unterschied Theile des Mikrometers		Unterschied Preuss. Linien
1	18°,66	19^{R},504	19^{R},485	+ 0^{R},019	+ 0^{R},0205	+ 0^{L},0025
	18,76	19,506	19,484	+ 0,022		
2	18,41	19,503	19,508	— 0,005	— 0,0065	— 0,0008
	18,66	19,486	19,494	— 0,008		
3	18,36	19,488	19,478	+ 0,010	+ 0,0045	+ 0,0006
	18,56	19,478	19,479	— 0,001		
4	18,36	19,451	19,441	+ 0,010	+ 0,003	+ 0,0004
	18,46	19,437	19,441	— 0,004		

Digitized by Google

Nr.	Temperatur	Mikrometer Original	Mikrometer Copie	Unterschied $A - O$ Theile des Mikrometers		Preufs. Linien
5	$18^{\circ},26$	$19^{R},503$	$19^{R},487$	$+ 0^{R},016$	$+ 0^{R},018$	$+ 0^{L},0022$
	18,36	19,506	19,486	+ 0,020		
6	18,26	19,496	19,483	+ 0,013	+ 0,0055	+ 0,0007
	18,36	19,488	19,490	— 0,002		
7	18,31	19,483	19,478	+ 0,005	— 0,001	— 0,0001
	18,41	19,493	19,500	— 0,007		
8	18,36	19,500	19,480	+ 0,020	+ 0,0135	+ 0,0017
	18,46	19,492	19,485	+ 0,007		
9	18,36	19,495	19,482	+ 0,013	+ 0,0095	+ 0,0012
	18,46	19,488	19,482	+ 0,006		
10	18,46	19,500	19,479	+ 0,021	+ 0,021	+ 0,0026
	18,56	19,490	19,469	+ 0,021		
Mittel.........	18,44	$C - O$			=	$+ 0^{L},0011$

Die unter den einzelnen 10 Messungen jeder der drei Copien vorkommenden Unterschiede zeigen, dafs der mittlere Fehler jeder derselben $= \pm 0^{L},00091$, und der mittlere Fehler der drei arithmetischen Mittel $= \pm 0^{L},00029$ ist. Man hätte ihn, durch häufigere Wiederholung der Vergleichungen, noch verkleinern können; allein ich halte ihn schon für beträchtlich kleiner als die Unsicherheit, welche aus dem Mangel einer festen Regel für die Auflegung des Originals und der Copien hervorgeht.

§. 3.

Bestimmung des Werthes einer Drehung der Schrauben beider Mikrometer des Apparates.

Obgleich die Verwandlung der, durch die Schraube des Mikrometers angegebenen Unterschiede des Originals und seiner Copien, in Theile der Preufsischen Linie, wegen ihrer geringen Gröfse, nur eine beiläufige Kenntnifs des Werthes einer Schraubendrehung erfordert, so werde ich doch diese Gelegenheit benutzen, um seine genauere, des Folgenden wegen nothwendige, Bestimmung mitzutheilen. Sie beruhet auf der Messung der einzelnen Linien des letzten Zolls des Originalmaafses von 1816, und auf der Vergleichung dieses ganzen Zolles mit 10 anderen Zollen, deren mittlere Länge als wahrer Preufsischer Zoll angenommen wurde.

Digitized by Google

Um die Entfernungen der einzelnen Linien durch die Mikrometerschraube zu messen, wurde der Maafsstab so auf den Apparat gelegt, dafs das mit dem Cylinder-Mikroskope in Berührung gebrachte Mikrometer, während jenes einem Theilstriche entsprach, 15 bis 16^R zeigte; nach der Beobachtung seiner Angabe wurde das Cylinder-Mikroskop auf den nächsten Theilstrich gestellt und das Mikrometer, welches nun 23 bis 24^R zeigte, aufs Neue angewandt. Dann wurde der Maafsstab verschoben, um den Zwischenraum zwischen dem zuletzt beobachteten und dem ihm nächsten Theilstriche, wieder auf derselben Stelle der Mikrometerschraube, zu messen u. s. w. Diese Stelle der Schraube wurde gewählt, weil alle meine Messungen nur in ihren Grenzen gemacht worden sind. Die zweimal wiederholten Messungen selbst sind folgende:

	Mikrometer I			Mikrometer II		
			Mittel			Mittel
$35^Z\,0^L - 1^L$	$8^R{,}018$	$8^R{,}016$	$8^R{,}017$	$7^R{,}980$	$7^R{,}977$	$7^R{,}9785$
1 − 2	8,012	8,012	8,012	7,956	7,953	7,9545
2 − 3	8,046	8,037	8,0415	7,985	7,977	7,981
3 − 4	8,028	8,025	8,0265	7,987	7,986	7,9865
4 − 5	7,997	7,992	7,9945	7,938	7,953	7,9455
5 − 6	8,030	8,020	8,025	7,973	7,978	7,9755
6 − 7	8,050	8,047	8,0485	8,003	7,991	7,997
7 − 8	8,028	8,013	8,0205	7,966	7,967	7,9665
8 − 9	8,029	8,018	8,0235	7,980	7,972	7,976
9 − 10	7,984	7,982	7,983	7,928	7,935	7,9315
10 − 11	8,060	8,072	8,066	8,003	8,016	8,0095
11 − 12	8,079	8,079	8,079	8,029	8,026	8,0275
Summe			96,337	......		95,7295

Die Vergleichung des letzten Zolles mit 10 anderen Zollen des Maafsstabes konnte durch die beiden Mikroskope und das Mikrometer leicht erlangt werden; sie ergab seine zehnfache Länge $0^R{,}044$ kürzer, als die Entfernung von dem 9ten Zolle bis zum 19ten, oder seine einfache Länge $0^R{,}004$ kürzer als das Mittel aus allen, ihn selbst mit zugezogen. Ich habe daher die Zahl der Schraubendrehungen, welche die Mikrometer einen Zoll fortbewegen,

$$= 96{,}341 \quad \text{und} \quad = 95{,}7335$$

Digitized by Google

angenommen, oder

1 Preufs. Linie = $8^{n},0284$ und = $7^{n},9778$
1 Pariser Linie = 8,3094 ………………… = 8,2570.

Zweiter Abschnitt.

Vergleichung des Originals des Preufsischen Längenmaafses von 1816 mit der Toise du Pérou.

§. 4.

Vergleichung verschiedener Copien der Toise du Pérou untereinander.

Indem man die Toise du Pérou im Auslande nur durch Copien kennen lernen kann, welche in Paris davon genommen worden sind, hat es ein Interesse, verschiedene derselben untereinander zu vergleichen, um aus ihrem gegenseitigen Verhalten das ihnen zu schenkende Zutrauen kennen zu lernen. Ich hatte den Vortheil, drei möglichst zuverlässige Copien derselben Maafseinheit vergleichen zu können. Die eine gehört der Königsberger Sternwarte und wird in der Folge durch *P* bezeichnet werden; sie ist dieselbe, welche den Bestimmungen der Pendellängen von Königsberg, Güldenstein und Berlin, so wie auch der Gradmessung in Ostpreufsen zum Grunde gelegt worden ist; sie ist 1823 von Hrn. *Fortin* verfertigt, von den Herren *Arago* und *Zahrtmann* mit dem Originale verglichen und $0^{L},0008$ kürzer als dieses gefunden; wie aus einem, von diesen Herren darüber ausgefertigten Certificate hervorgeht. Die beiden anderen gehören zu dem reichen Instrumentenvorrathe, welchen Herr Etatsrath *Schumacher* in Altona gesammelt hat und wurden mir von ihm, zur Benutzung, gütigst überlassen. Die eine derselben (*F*) ist 1821, wie die Königsberger Toise, von Hrn. *Fortin* verfertigt und von Hrn. *Arago* verglichen und für richtig erklärt. Die andere (*G*) hat Hr. *Gambey* 1831 gemacht, und die Herren *Arago*, *Mathieu* und *Nyegaard* haben sie, bei ihrer Vergleichung, $0^{L},00021$ zu lang gefunden.

Digitized by Google

Über die im J. 1835 von mir gemachten Vergleichungen dieser drei Exemplare der Toise untereinander habe ich, nachdem das Verfahren, im Allgemeinen, im 1sten §. erläutert worden ist, nur noch Einzelnheiten anzuführen. Man kann die Wasserwagen der Fühlhebel der Mikrometer des Apparats, durch Drehung der Mikrometerschrauben, entweder zum völligen Einspielen bringen, oder sich mit der näherungsweisen Hervorbringung dieses Zustandes begnügen und das, was daran fehlt, durch die Ablesung der Scalen der Wasserwagen erkennen. Die stattfindende äufserste Beweglichkeit der Wasserwagen macht es aber zeitraubend, sie durch die Mikrometerschrauben zum Einspielen zu bringen, denn die Drehung der Schraube des ersten Mikrometers bewegt die Blase der Wasserwage desselben um 8,6 Theile ihrer Scale; bei dem zweiten Mikrometer beträgt diese Bewegung 7,5 Theile; der Zeitverlust ist desto gröfser, da bei allen Mikrometerschrauben vermieden werden mufs, sie rückwärts zu drehen. Durch das näherungsweise Einstellen der Mikrometer und durch die Ablesung ihrer Wasserwagen wird aber dieser Zeitverlust vermieden, auch an Genauigkeit gewonnen, indem man, durch ihre Einstellung auf einen Strich der Schraubentrommeln, oder auf die Mitte zwischen zwei Strichen, die Schätzung der kleineren Theile vermeidet. Diese Beobachtungsart habe ich daher ohne Ausnahme, bei allem Folgenden angewandt. Wenn zwei der Toisen eine Anzahl Mal miteinander verglichen waren, wandte ich beide um und wiederholte ihre Vergleichungen eben so oft in dieser Lage; die in beiden Lagen gemachten Vergleichungen sind, in den folgenden Verzeichnissen derselben, durch *o* und *u* unterschieden. Über ihre Berechnungsart bemerke ich noch, dafs man die Angaben beider Mikrometer, a und a', obgleich ihre Schraubengänge nicht gleiche Werthe besitzen, in eine verbesserte Summe a zusammenziehen kann; man hat nämlich, wenn m und m' Gänge der Schrauben einer Linie gleich sind, die, zwischen zwei miteinander zu verbindenden Vergleichungen als *unveränderlich* anzunehmende Zahl

$$C = \text{Toise} + \frac{a}{m} + \frac{a'}{m'},$$

wofür man

$$C = \text{Toise} + \frac{m+m'}{2mm'}\left\{a + a' - (a - a')\frac{m-m'}{m+m'}\right\},$$

und in dem gegenwärtigen Falle, in welchem von Pariser Linien die Rede ist (§. 3.),

$$C = \text{Toise} + \frac{1}{8{,}28312}\left\{a + a' - \frac{a - a'}{317}\right\}$$

schreiben kann. Die in den Klammern enthaltene, von a und a' abhängige Gröfse ist in den folgenden Verzeichnissen durch α bezeichnet.

1. *Vergleichungen der Toisen* P *und* F.

1835		Wärme (C)	a	a'	α	Untersch.	$F-P$ Paris. Linien
Juli 30	P o	17°,92	17'',8323	23'',3444	41'',194	+ 0'',030	+ 0L,0036
	F —	17,94	18,7977	22,3553	41,164		
	F —	17,89	18,7992	22,3561	41,166	+ 0,024	+ 0,0029
	P —	17,90	18,8514	22,3280	41,190		
	P —	17,90	18,8505	22,3275	41,189	+ 0,025	+ 0,0030
	F —	17,91	18,7854	22,3669	41,164		
	F —	17,89	18,7850	22,3653	41,162	+ 0,022	+ 0,0027
	P —	17,90	19,3243	21,8530	41,184		
	P —	17,89	19,3235	21,8522	41,184	+ 0,019	+ 0,0023
	F —	17,83	20,2830	20,8804	41,165		
	P u	17,87	18,6950	22,4985	41,205	+ 0,033	+ 0,0040
	F —	17,90	18,8678	22,2936	41,172		
	F —	17,85	18,8680	22,2927	41,172	+ 0,028	+ 0,0034
	P —	17,91	19,4307	21,7614	41,200		
	P —	17,89	19,4302	21,7617	41,199	+ 0,024	+ 0,0029
	F —	17,87	18,6904	22,4729	41,175		
	F —	17,85	18,6908	22,4720	41,175	+ 0,014	+ 0,0017
	P —	17,84	18,9173	22,2611	41,189		
	P —	17,85	18,9170	22,2617	41,189	+ 0,019	+ 0,0023
	F —	17,86	18,8274	22,3320	41,170		
Aug. 1	P o	17,85	18,7559	22,4814	41,249	+ 0,044	+ 0,0053
	F —	17,80	18,9707	22,2238	41,205		
	F —	17,74	18,9704	22,2242	41,206	+ 0,030	+ 0,0036
	P —	17,72	19,1820	22,0448	41,236		
	P —	17,67	19,1828	22,0464	41,238	+ 0,032	+ 0,0039
	F —	17,62	20,0374	21,1652	41,206		
	F —	17,60	20,0375	21,1672	41,208	+ 0,028	+ 0,0034
	P —	17,59	20,2651	20,9687	41,236		
	P —	17,56	20,2651	20,9695	41,237	+ 0,034	+ 0,0041
	F —	17,60	18,9364	22,2561	41,203		

Digitized by Google

1835		Wärme C	a	a'	a	Untersch.	F − P Paris. Linien
Aug. 1	F u	17°,58	19‴,3855	21‴,8187	41‴,212	+ 0‴,024	+ 0L,0029
	P —	17,60	18,6654	22,5582	41,236		
	P —	17,56	18,6672	22,5591	41,239	+ 0,025	+ 0,0030
	P —	17,55	19,6815	21,5265	41,214		
	F —	17,50	19,6824	21,5284	41,217	+ 0,020	+ 0,0024
	P —	17,52	19,7184	21,5133	41,237		
	P —	17,43	19,7202	21,5154	41,241	+ 0,036	+ 0,0043
	F —	17,48	19,8653	21,3351	41,205		
	F —	17,48	19,8657	21,3360	41,206	+ 0,034	+ 0,0041
	P —	17,48	18,9995	22,2308	41,240		
		17,74	Mittel aus 20 Vergleichungen				+ 0,00329

2. *Vergleichungen der Toisen* P *und* G.

1835		Wärme C	a	a'	a	Untersch.	G − P Paris. Linien
Juli 30	G o	16°,14	20‴,0485	21‴,2250	41‴,277	— 0‴,033	— 0L,0040
	P —	16,11	19,9249	21,3149	41,244		
	P —	16,10	19,9239	21,3150	41,243	— 0,043	— 0,0052
	G —	16,20	19,0136	22,2623	41,286		
	G —	16,16	19,0124	22,2627	41,285	— 0,017	— 0,0021
	P —	16,16	19,3480	21,9117	41,268		
	P —	16,19	20,2328	21,0143	41,250	— 0,028	— 0,0034
	G —	16,21	20,1638	21,1109	41,278		
	G u	16,29	19,1621	22,1142	41,286	— 0,031	— 0,0037
	P —	16,25	18,2524	22,9875	41,255		
	P —	16,32	19,9718	21,2620	41,238	— 0,048	— 0,0058
	G —	16,41	18,8368	22,4379	41,286		
	G —	16,42	18,8369	22,4401	41,288	— 0,060	— 0,0072
	P —	16,44	19,2036	22,0152	41,228		
31	P o	16,45	18,6828	22,5879	41,283	— 0,021	— 0,0025
	G —	16,35	19,7302	21,5680	41,304		
	G —	16,27	19,7298	21,5695	41,305	— 0,031	— 0,0037
	P —	16,20	20,3634	20,9093	41,274		
	P —	16,15	20,3671	20,9112	41,280	— 0,024	— 0,0029
	G —	16,11	20,2502	21,0512	41,304		
	G —	16,01	20,2503	21,0531	41,306	— 0,021	— 0,0025
	P —	15,96	19,7836	21,4963	41,285		

Digitized by Google

1835		Wärme (c)	a	a'	a	Untersch.	G − P (Paris. Linien)
Juli 31	P o	15°,96	19,7840	21,4972	41,287	— 0,029	— 0,0035
	G —	15,91	19,7801	21,5307	41,316		
	G —	15,90	19,7828	21,5322	41,321	— 0,022	— 0,0026
	P —	15,89	19,5015	21,7898	41,299		
	P u	15,86	19,7488	21,5309	41,285	— 0,026	— 0,0031
	G —	15,86	19,1942	22,1081	41,311		
	G —	15,80	19,1897	22,1082	41,307	— 0,022	— 0,0027
	P —	15,80	19,7481	21,5316	41,285		
	P —	15,76	19,7486	21,5316	41,286	— 0,043	— 0,0052
	G —	15,77	19,6611	21,6619	41,329		
	G —	15,72	19,6614	21,6622	41,330	— 0,049	— 0,0059
	P —	15,74	19,5203	21,7535	41,281		
	P —	15,70	19,5216	21,7531	41,282	— 0,028	— 0,0034
	G —	15,71	19,9249	21,3804	41,310		
	G —	15,67	19,9271	21,3811	41,313	— 0,032	— 0,0039
	P —	15,67	19,6942	21,5804	41,281		
		16,04	Mittel aus 19 Vergleichungen				— 0,00386

3. *Vergleichungen der Toisen* F *und* G.

1835		Wärme (c)	a	a'	a	Untersch.	G − F (Paris. Linien)
Juli 31	F o	18°,99	19,6363	21,5425	41,185	— 0,055	— 0,0066
	G —	18,96	18,8296	22,3992	41,240		
	G —	18,91	18,8320	22,4001	41,243	— 0,059	— 0,0071
	F —	18,93	18,8633	22,3094	41,184		
	F —	18,94	18,8645	22,3098	41,185	— 0,063	— 0,0076
	G —	18,94	18,8051	22,4315	41,248		
	G —	18,94	18,8055	22,4322	41,249	— 0,063	— 0,0076
	F —	18,94	19,3512	21,8274	41,186		
	F —	18,94	19,3511	21,8285	41,187	— 0,056	— 0,0068
	G —	18,97	18,8625	22,3691	41,243		
	G u	18,95	18,7806	22,4515	41,244	— 0,066	— 0,0080
	F —	19,01	18,2770	22,8862	41,178		
	F —	18,94	18,2774	22,8859	41,178	— 0,065	— 0,0078
	G —	19,00	19,3306	21,9040	41,243		
	G —	18,95	19,3309	21,9055	41,245	— 0,067	— 0,0081
	F —	18,97	19,1026	22,0657	41,178		

Digitized by Google

1835		Wärme	a	a'	α	Untersch.	G − F Paris. Linien
Juli 31	F u	$18^{\circ},92$	$19''',1042$	$22''',0679$	$41''',181$	— $0''',060$	— $0^{L},0072$
	G —	18,92	19,3040	21,9283	41,241		
	G —	18,90	19,3053	21,9294	41,243	— 0,051	— 0,0062
	F —	18,92	19,7041	21,4822	41,192		
		18,93	Mittel aus 10 Vergleichungen				— 0,00730

Das wahrscheinlichste Resultat der drei gefundenen arithmetischen Mittel, nämlich:

$F - P = + 0^{L},00329$ · Wärme $= 17^{\circ},74$ .... 20 Vergleichungen
$G - P = - 0,00386$ · — 16,04 .... 19 —
$G - F = - 0,00730$ · — 18,93 .... 10 —

ist, unter der Voraussetzung, daſs die Veränderungen der drei Toisen durch die Wärme, in den Grenzen der bei ihren Vergleichungen stattfindenden Verschiedenheit derselben, nicht merklich ungleich seien:

$F - P = + 0^{L},00333$ .... Gewicht $= 26,55$
$G - P = - 0,00390$ .... $= 25,67$.

Der mittlere Fehler einer Vergleichung findet sich aus den vorkommenden Unterschieden $= \pm 0^{L},00106$, und der mittlere Fehler der beiden, eben angeführten Resultate $= \pm 0^{L},00021$.

Da, nach den Certificaten dieser drei Toisen, ihre Unterschiede

$$F - P = + 0^{L},0008$$
$$G - P = + 0,0010$$

sein sollten, und da das hiervon verschiedene, aus ihren gegenwärtigen Vergleichungen gezogene Resultat nur innerhalb sehr enger Grenzen bezweifelt werden kann, so zeigt diese Untersuchung eine, mehrere Tausentel einer Linie betragende, Unsicherheit der verschiedenen Copien der Toise du Pérou. Die durch P bezeichnete ist,

1. nach ihrem eigenen Certificate .... $= 863^{L},99920$
2. nach dem Certificate von $F = 864^{L},00000 - 0^{L},00333 = 863,99667$
3. — — — — $G = 864,00021 + 0,00390 = 864,00411$;

welche Bestimmungen, in den Tausenteln der Linie, zu grofse Verschiedenheiten darbieten, um irgend einer, aus ihnen abgeleiteten Annahme der Länge der Toise, bis auf solche Theile, versichern zu können. Bei dieser, nicht zu beseitigenden, Unsicherheit über die Einheit des französischen Maafses schien es nicht angemessen, an die auf der Annahme der Toise $P = 863^{L},9992$ schon beruhenden Resultate eine zweifelhafte Änderung, etwa dem arithmetischen Mittel der drei vorhandenen entsprechend, anzubringen. Ich habe daher die Toise P ferner so angenommen, wie sie ihrem Certificate zufolge ist, nämlich $= 863^{L},9992$ der Toise du Pérou.

§. 5.

Bestimmung der Länge der Anschiebe-Cylinder.

Aus der Darstellung (§. 1.) der Methode, welche ich zu der Vergleichung des Originals des Preufsischen Längenmaafses mit der Toise angewandt habe, geht hervor, dafs diese Vergleichung die Kenntnifs der halben Summe der Längen der Anschiebe-Cylinder $= \frac{1}{2}\{A+B\}$ voraussetzt; zugleich zeigt diese Darstellung, dafs dieselbe durch das dreifsig Mal wiederholte Aneinanderschieben jener Cylinder, in ihrer Bahn, erlangt wird.

Die Versuche über die Gröfse von $\frac{1}{2}\{A+B\}$ habe ich so angeordnet, dafs ich jeden derselben mit der Auflegung und Messung der Toise, wie immer in dem Bade von Weingeist, anfing und endigte. Zwischen diesen beiden Messungen der Toise machte ich zwei Messungen der funfzehnfachen Summe der Längen beider Anschiebe-Cylinder. Weitere Erklärungen werden, zum Verständnifs des folgenden Verzeichnisses der Messungen selbst, nicht erforderlich sein.

		Wärme	α	α'	α	15(A+B) − Toise	Paris. Linien	Wärme
Aug. 1	Toise *o*	$16^{\circ}_{c},04$	$19^{R},8058$	$21^{R},4614$	$41^{R},272$			
	15(A+B)		18,298	20,055	38,359	$+ 2^{R},9165$	$+ 0^{L},3521$	$16^{\circ}_{c},11$
			18,208	20,138	38,352			
	Toise *u*	16,18	19,4325	21,8319	41,272			
—	Toise *u*	16,14	19,4254	21,8310	41,264			
	15(A+B)		18,775	19,583	38,361	+ 2,895	+ 0,3495	16,21
			20,927	17,456	38,372			
	Toise *o*	16,28	19,8753	21,3785	41,259			

Digitized by Google

		Wärme	a	a'	α	$15(A+B)$ — Toise	Paris. Linien	Wärme
Aug. 1	Toise o	16°,28 C	19",8751	21",3766	41",256			
	15(A+B)		18,303	20,050	38,359	+ 2",8995	+ 0^L,3500	16°,38 C
	15(A+B)		18,162	20,173	38,341			
	Toise o	16,48	19,2919	21,9422	41,243			
5	Toise o	18,70	19,8034	21,4929	41,302			
	15(A+B)	18,81	18,133	20,315	38,455	+ 2,8645	+ 0,3458	18,90
	15(A+B)	18,96	17,177	21,247	38,437			
	Toise u	19,12	18,9418	22,3665	41,319			
—	Toise u	19,15	18,9328	22,3651	41,309			
	15(A+B)	19,13	16,895	21,504	38,414	+ 2,878	+ 0,3475	19,25
	15(A+B)	19,31	17,669	20,754	38,433			
	Toise o	19,41	19,1426	22,1417	41,294			
—	Toise o	19,41	19,1558	22,1413	41,307			
	15(A+B)	19,48	17,996	20,457	38,461	+ 2,8575	+ 0,3450	19,53
	15(A+B)	19,53	16,274	22,126	38,419			
	Toise u	19,71	19,3690	21,9110	41,288			
6	Toise o	20,19	18,2019	23,0595	41,308			
	15(A+B)	20,17	16,723	21,686	38,425	+ 2,873	+ 0,3468	20,10
	15(A+B)	20,04	16,832	21,591	38,438			
	Toise u	20,00	18,6219	22,6663	41,301			
—	Toise u	19,92	18,6220	22,6651	41,300			
	15(A+B)	19,91	18,437	20,014	38,456	+ 2,878	+ 0,3475	19,88
	15(A+B)	19,85	19,721	18,648	38,366			
	Toise o	19,82	18,7336	22,5324	41,278			

Um diese, bei verschiedenen Temperaturen gemachten Messungen der funfzehnfachen Summe der Längen beider Anschiebe-Cylinder mit einander vergleichen zu können, mufs man die Gröfse der Veränderung kennen, welche die Wärme, in ihrem Unterschiede von der Toise, hervorbringt. Ich habe, bei einer späteren Gelegenheit, directe Versuche hierüber gemacht, welche man in dem fünften Abschnitte kennen lernen wird, und woraus sich ergeben hat, dafs dieser Unterschied sich, mit jedem Centesimalgrade des Thermometers, um — 0^L,0009805 verändert. Bringt man die angeführten acht Messungen hierdurch auf die Normaltemperatur = 16°,25 C., so ergeben sie:

$30 \cdot \frac{1}{2}\{A+B\}$ = Toise $P + 0^L{,}3520$	Unterschied = $+ 0^L{,}00195$	
$+ 0{,}3495$	.... $- 0{,}00055$	
$+ 0{,}3501$	.... $+ 0{,}00005$	
$+ 0{,}3484$	.... $- 0{,}00165$	
$+ 0{,}3505$	.... $+ 0{,}00045$	
$+ 0{,}3482$	.... $- 0{,}00185$	
$+ 0{,}3506$	.... $+ 0{,}00055$	
$+ 0{,}3511$	.... $+ 0{,}00105$	
Mittel .... = Toise $P + 0{,}35005$		

also, da die Länge der Toise $P = 863^L{,}9992$ angenommen wird,

$$30 \cdot \frac{1}{2}\{A+B\} = 864^L{,}34925$$

und .... $\frac{1}{2}\{A+B\} = 28{,}81164.$

Durch die, zwischen den einzelnen der 8 Messungen vorkommenden Unterschiede, wird man in den Stand gesetzt, ein Urtheil über die Genauigkeit zu fällen, mit welcher das Aneinanderschieben der Cylinder in ihrer Bahn sich bewirken läſst. Diese Unterschiede geben den mittleren Fehler eines der 8 Resultate, welches auf einer wiederholten Vergleichung der 30 Mal aneinander geschobenen Cylinder mit der Toise beruhet, $= \pm 0^L{,}00130$, also den m. F. einer nicht wiederholten Vergleichung dieser Art $= \pm 0^L{,}00184$. Da oben der m. F. einer Vergleichung zweier Toisen untereinander $= \pm 0^L{,}00106$ gefunden ist, so kann man den mittleren Fehler, der aus dem 30maligen Aneinanderschieben entstanden ist, auf $\sqrt{\{(0{,}00184)^2 - (0{,}00106)^2\}} = \pm 0^L{,}0015$ schätzen. So klein dieser m. F. erscheint, so würde er ohne Zweifel noch kleiner sein, wenn die fortwährenden Berührungen der Cylinder mit der Hand, nicht selbst in dem Weingeistbade, in welchem sie sich befinden, Veränderungen ihrer Wärme hervorgebracht haben müſsten. Ich glaube hieraus schlieſsen zu müssen, daſs das Aneinanderschieben von Stahl-Cylindern mit einer ebenen und einer kugelförmigen Endfläche, in einer ihre Bewegung völlig sichernden Bahn, mit sehr groſser Sicherheit bewirkt, und auch bei anderen Veranlassungen der praktischen Mechanik nützlich angewandt werden kann.

Digitized by Google

§. 6.

Vergleichung des Originals des Preufsischen Längenmaafses von 1816 *mit der Toise.*

Jede der gemachten Vergleichungen besteht aus fünf Messungen, nämlich dreien der Toise, einer der Summe $2O+A$ und einer der Summe $2O+B$; eine der letzteren fällt, der Zeit nach, zwischen die beiden ersten Auflegungen der Toise, die andere zwischen die beiden letzten. Die Auflegung auf den Apparat und die Verdoppelung des Originals O wurde auf *beiden* Seiten des Lagers der Toise gemacht, indem nur dadurch die Voraussetzung der vollkommen geraden Richtung der Bahn, wie ich schon im 1sten §. bemerkt habe, aus dem Resultate geschafft werden kann; da der Apparat in der Richtung des Meridians stand, so sind diese beiden Auflegungsarten durch *Ost* und *West* unterschieden. Die Vergleichungen selbst sind folgende:

1835			Wärme	a	a'	α	$2O+\frac{1}{2}(A+B)-$ Toise		Wärme
								Paris. Linien	
Aug. 2	West	Toise o	$16^{\circ}{,}39$	$19^{R}{,}0613$	$22^{R}{,}1743$	$41^{R}{,}245$			
		$2O+B$	16,49	20,8204	23,7574	44,587			
		Toise u	16,50	20,2160	21,0267	41,245	$-3^{R}{,}367$	$-0^{L}{,}4065$	$16^{\circ}{,}55$
		$2O+A$	16,48	20,7691	23,8671	44,646			
		Toise o	16,51	18,4678	22,7767	41,258			
—	West	Toise o	16,51	18,4715	22,7769	41,262			
		$2O+A$	16,50	20,5553	24,0786	44,645			
		Toise u	16,49	18,3009	22,9317	41,247	$-3{,}348$	$-0{,}4042$	16,49
		$2O+B$	16,46	20,2294	24,3058	44,548			
		Toise o	16,50	19,0175	22,2091	41,237			
3	West	Toise u	17,81	18,9202	22,2884	41,219			
		$2O+B$	17,79	21,4993	23,0779	44,582			
		Toise o	17,86	17,6329	23,5738	41,225	$-3{,}378$	$-0{,}4078$	17,86
		$2O+A$	17,91	22,2448	22,3760	44,621			
		Toise u	17,95	18,5068	22,7060	41,226			
—	Ost	Toise u	17,94	18,5116	22,7095	41,234			
		$2O+A$	18,00	22,0953	22,5381	44,635			
		Toise o	18,11	18,9627	22,2461	41,219	$-3{,}396$	$-0{,}4100$	18,07
		$2O+B$	18,14	20,9481	23,6449	44,602			
		Toise u	18,16	19,9515	21,2598	41,215			

Digitized by Google

1835			Wärme (c)	a	a'	a	2O + ½(A+B) − Toise	Paris. Linien	Wärme
Aug. 3	Ost	Toise *o*	16°,31	19^R,5237	21^R,7678	41^R,299			
		2O+A	16,29	22,3953	22,2771	44,672			
		Toise *u*	16,26	19,9804	21,2954	41,280	— 3^R,356	— 0^L,4052	16°,28
		2O+B	16,25	19,9679	24,6336	44,616			
		Toise *o*	16,31	18,6166	22,6546	41,284			
4	West	Toise *u*	17,44	19,5159	22,0510	41,575			
		2O+A	17,37	20,9191	24,0007	44,930			
		Toise *o*	17,40	19,4035	22,1712	41,583	— 3,317	— 0,4005	17,37
		2O+B	17,31	18,3122	26,5245	44,863			
		Toise *u*	17,35	19,8948	21,6802	41,581			
—	Ost	Toise *u*	17,35	19,8945	21,6781	41,578			
		2O+A	17,33	21,4317	23,5636	45,002			
		Toise *o*	17,39	19,3873	22,1868	41,583	— 3,404	— 0,4110	17,40
		2O+B	17,41	21,4794	23,4665	44,952			
		Toise *u*	17,50	19,1372	22,4111	41,559			
—	Ost	Toise *u*	17,49	19,1384	22,4115	41,560			
		2O+A	17,49	21,5508	23,4144	44,971			
		Toise *o*	17,62	20,1008	21,4589	41,564	— 3,386	— 0,4088	17,59
		2O+B	17,63	21,4993	23,4175	44,923			
		Toise *u*	17,73	19,6829	21,8685	41,558			
—	West	Toise *u*	17,89	19,6779	21,8649	41,550			
		2O+A	17,95	20,9708	23,9649	44,945			
		Toise *o*	18,09	19,7628	21,7783	41,548	— 3,362	— 0,4059	18,04
		2O+B	18,13	20,9642	23,9050	44,879			
		Toise *u*	18,16	19,7051	21,8388	41,551			
5	West	Toise *o*	19,32	19,6968	21,8008	41,504			
		2O+A	19,35	21,2131	23,6752	44,896			
		Toise *u*	19,46	20,6129	20,9100	41,524	— 3,372	— 0,4071	19,52
		2O+B	19,65	21,0222	23,8402	44,871			
		Toise *o*	19,81	20,1898	21,3130	41,506			
—	Ost	Toise *o*	19,84	20,1901	21,3121	41,506			
		2O+A	19,87	21,7714	23,1391	44,915			
		Toise *u*	19,94	18,8510	22,6393	41,502	— 3,384	— 0,4085	20,00
		2O+B	20,03	21,5150	23,3483	44,869			
		Toise *o*	20,31	20,9877	20,9290	41,515			
6	West	Toise *o*	18,37	18,9637	22,3731	41,348			
		2O+A	18,30	21,9318	22,7575	44,692			
		Toise *u*	18,37	19,2208	22,0825	41,312	— 3,3335	— 0,4024	18,35
		2O+B	18,33	22,2479	22,3866	44,635			
		Toise *o*	18,40	18,1580	23,1565	41,330			

1835			Wärme t	a	a'	a	$2O+\frac{1}{2}(A+B)-$ Toise	Paris. Linien	Wärme
Aug. 6	Ost	Toise o	$18^{\circ},41$	$18^{R},1565$	$23^{R},1561$	$41^{R},328$			
		$2O+A$	18,38	20,9770	23,7607	44,747			
		Toise u	18,42	18,8534	22,4533	41,318	$-3^{R},4005$	$-0^{L},4105$	$18^{\circ},47$ c
		$2O+B$	18,47	20,0546	23,6230	44,686			
		Toise o	18,68	19,8026	21,4936	41,302			

Diese Vergleichungen des Originals des Preufsischen Längenmaafses von 1816 mit der Toise bedürfen, selbst unter der Annahme, dafs das Eisen, woraus beide gemacht sind, eine gleiche Einwirkung von der Wärme erfahre, einer kleinen Reduction auf die gemeinschaftliche Normaltemperatur beider Maafse. Da nämlich jenes, doppelt genommen, ein Dreifsigstel kürzer ist als die Toise, und da dieser Unterschied durch die Stahl-Cylinder $\frac{1}{2}\{A+B\}$ gemessen ist, die der Toise gleiche Länge von Stahl aber, dem vorigen Paragraphen zufolge, sich, für jeden Grad des Thermometers, $0^{L},0009805$ weniger ausdehnt als die Toise selbst, so ist die erforderliche Reduction:

$$= + 0^{L},00003268\,(t - 16^{\circ},25).$$

Durch ihre Anwendung verwandeln die gemessenen Werthe von $2O+\frac{1}{2}(A+B)-$ Toise sich in:

	West		Ost	
	$16^{\circ},55$	$-0^{L},4065$	$18^{\circ},07$	$-0^{L},4099$
	16,49	−0,4042	16,28	−0,4052
	17,86	−0,4077	17,40	−0,4110
	17,37	−0,4005	17,59	−0,4088
	18,04	−0,4058	20,00	−0,4084
	19,52	−0,4070	18,47	−0,4104
	18,35	−0,4023		
Mittel	17,74	−0,40486	17,97	−0,40895

Das Mittel aus beiden Reihen, unabhängig von der Voraussetzung der *geraden* Richtung der Bahn, ist:

$$2O+\frac{1}{2}\{A+B\} = \text{Toise} - 0^{L},40690 = 863^{L},59230$$

und da .... $\frac{1}{2}\{A+B\}$ .... $= 28,81164$

Digitized by Google

ist, ergiebt sich daraus

$$2\,O = 834^{L}{,}78066$$

oder die Länge des Originals des Preufsischen Längenmaafses von 1816 mit derselben Toise gemessen, auf welche die Beobachtung der Pendellänge sich bezieht,

$$= 417^{L}{,}39033.$$

Bringt man den in beiden Lagen gemachten Messungen, die einer kleinen Abweichung der Bahn von der geraden Linie zuzuschreibende Verbesserung von $\mp\,0^{L}{,}00205$ an, und ordnet man sie nach der Zeitfolge, so erhält man folgende, aus den 13 einzelnen Messungen hervorgehenden Werthe von O:

	Wärme	O	Unterschied
	c		
Aug. 2	$16^{\circ}{,}55$	$417^{L}{,}3895$	$-\,0^{L}{,}0008.3$
	16,49	3907	+ 0,0003.7
3	17,86	3889	— 0,0014.3
	18,07	3899	— 0,0004.3
	16,28	3922	+ 0,0018.7
4	17,37	3925	+ 0,0021.7
	17,40	3893	— 0,0010.3
	17,59	3904	+ 0,0000.7
	18,04	3898	— 0,0005.3
5	19,52	3893	— 0,0010.3
	20,00	3906	+ 0,0002.7
6	18,47	3896	— 0,0007.3
	18,35	3916	+ 0,0012.7

Der mittlere Fehler jeder dieser Messungen ist $= \pm\,0^{L}{,}00120$ und der m. F. des daraus gezogenen Endresultats $= \pm\,0^{L}{,}00033$. Er begreift die Unsicherheit nicht mit in sich, welche aus der Willkür in der Auflegungsart entsteht. Falls die Einwirkungen der Wärme auf das Eisen beider Maafse verschieden sein sollten, so würde dem Resultate noch eine kleine Änderung anzubringen sein, indem es die Länge des $17^{\circ}{,}85$ C. warmen Preufsischen Originalmaafses von 1816, auf der eben so warmen Toise gemessen, ist, während beide sich in der Wärme von $16^{\circ}{,}25$ C. befunden haben sollten, um unmittelbar ihr wahres Verhältnifs zu ergeben.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Verfertigung eines neuen Originals des Preufsischen Längenmaafses.

§. 7.

Einrichtung des neuen Original-Maafses.

Die verfolgte Absicht, sowohl die Einheit des Preufsischen Längenmaafses unzweideutig festzusetzen, als auch den Nutzen dieser Festsetzung, durch möglichst leichte Zugänglichkeit seines Originals, zu vermehren, und endlich, den davon zu nehmenden Copien die gröfste, gegenwärtig erreichbare, Genauigkeit zu geben, verlangten die Verfertigung eines neuen Etalons derselben, welches ein *Endflächenmaafs* von der gröfsten Unveränderlichkeit und Dauerhaftigkeit, welche man zu erreichen wufste, sein mufste. Die Gründe, woraus dieses hervorgeht, habe ich oben schon angeführt. Indem einer von ihnen ist, dafs eine, auf die Oberfläche eines Stabes aufgetragene Entfernung nicht eher ihre völlige Unzweideutigkeit erhält, als bis die Art, wie der Stab auf eine Ebene, oder auf Punkte aufgelegt werden soll, fest bestimmt ist, diese Bestimmung aber bei dem vorhandenen Originale des Preufsischen Längenmaafses fehlt, so folgt, dafs man nicht sowohl die im J. 1835 gemessene, in den Tausendteln der Linie zweideutige Länge dieses Originals, als das Gesetz, nach dessen Forderungen es verfertigt worden ist, zur Richtschnur bei der Verfertigung des neuen Maafses nehmen mufste. Dafs *dieses,* in der Folge, als wahres Original des Preufsischen Längenmaafses angesehen werden mufs, ist wenigstens so lange nothwendig, als keine feste Bestimmung über die Auflegungsart des früher vorhandenen (übrigens nie in Anwendung gekommenen) gegeben sein wird; es würde auch keine Schwierigkeit haben, diese so zu wählen, dafs das Original von 1816 genau die Länge erhielte, welche das Gesetz ihm zu geben beabsichtigt. Allein *zwei* Originale eines Maafses sind offenbar *zu viel;* so wie ein neues nothwendig wird, verliert das alte seine Bedeutung. Jenes werde ich daher, in der

Digitized by Google

Folge, ohne weitere Bezeichnung, *Original* nennen, so wie ich dieses bisher *Original von* 1816 genannt habe.

Das neue Original des Preufsischen Längenmaafses ist ein Stab von Huntsmanschem Gufsstahl und hat die Länge von sehr nahe drei Preufsischen Fufsen; seine Durchschnitte sind Quadrate von 9 Linien Seite. In seine Enden sind abgekürzte Kegel von *Sapphir* eingelassen, deren gröfsere Endflächen sich in dem Inneren des Stabes befinden, während die kleineren über die Endflächen des Stahls ein wenig hervorragen, und durch ihre Entfernung, in der Axe des Stabes gemessen, sein Maafs angeben. Unter der Axe des Stabes verstehe ich die gerade Linie, welche die Durchschnittspunkte der Diagonalen seiner beiden Endflächen miteinander verbindet.

Die Einrichtung zur Befestigung der Sapphire wird durch Taf. II Fig. 9 und 10 in ihrer wahren Gröfse dargestellt. In jede Endfläche des Stabes ist ein cylindrisches Loch (*a*) eingebohrt, in welches ein Schraubengewinde eingeschnitten ist; etwa 5 Lin. entfernt von der Endfläche erweitert sich dieses Loch (*c*), um ein gröfseres Schraubengewinde aufzunehmen; noch näher an der Endfläche (*b*) erweitert es sich wieder und ist hier genau cylindrisch ausgearbeitet. In das erste Schraubengewinde pafst die Schraube von Stahl *d*, welche ihre Mutter so nahe ausfüllt, dafs sie nur mit nicht unbeträchtlicher Kraftäufserung gedrehet werden kann, welches durch einen, auf ihren quadratischen Kopf (*e*) zu steckenden Schlüssel geschieht. Der Cylinder von Stahl *kk*, welcher mit einem hervorstehenden Rande (*g*) versehen ist und die cylindrische Vertiefung *b* genau ausfüllt, kann, mittelst seiner, in die Mutter *c* passenden Schraube, mit dem Stabe verbunden werden. In seiner Axe ist er kegelförmig, von Innen nach Aufsen ausgearbeitet; sein kegelförmiges Loch ist aber mit reinem Golde gefüllt und wieder kegelförmig durchbohrt, so dafs nur der, sich im Durchschnitte *hh* zeigende Mantel dieses Metalls stehen geblieben ist. In das Gold pafst genau der Kegel von Sapphir (*i*), so dafs, wenn er von Innen in sein Lager geschoben und gehörig eingedrückt wird, seine äufsere Oberfläche sich in der Ebene der äufseren Oberfläche des Stahls befindet. Der Schraubenkopf *e* ist abgerundet und vergoldet, so dafs seine convexe Fläche, bei dem Einschrauben des Cylinders *kk*, zuerst die Grundfläche des Sapphirkegels berührt, dann aber, bei der Fortsetzung des Einschraubens, den Stein in das Gold eindrückt, und seine äufsere Fläche etwas über die Ebene hervortreibt, in

Digitized by Google

welcher sie sich anfänglich befand. Hierdurch erlangt man den Beweis des festen Anliegens des Sapphirs an seinen, im Inneren des Stabes befindlichen Flächen. Der hervorstehende Rand (*g*) des Cylinders wird nun auf der Drehbank abgeschnitten und die Oberfläche polirt, wodurch jede äufsere Spur der Befestigungsart verschwindet. Auf diese Art ist der Sapphir gegen Unvorsichtigkeit und absichtliche Versuche ihn zu verrücken (offenbare Gewalt ausgenommen), geschützt; gegen die Erweiterung seines Lagers durch Rost schützt ihn das Gold.

Die hier gegebene Beschreibung bezieht sich auf das Ende des Stabes, welches *zuerst* in Ordnung gebracht wird; das andere fordert einige Änderungen der Einrichtung, denn der zweite Sapphir mufs nicht allein befestigt, sondern auch in der beabsichtigten Entfernung von dem, schon in dem Stabe befindlichen, befestigt werden. Die zu diesem Zwecke zu treffenden Einrichtungen werden durch die Mittel bedingt, durch welche man die Länge des Etalons mifst. Der im 1ten §. beschriebene Messungsapparat ergiebt aber die Entfernung der Oberflächen der beiden Sapphire dadurch, dafs man sie mit den kugelförmig geschliffenen Endflächen der auf der Bahn liegenden Stahlcylinder in Berührung bringt, während das Etalon in der Vertiefung der Messingplatte des Apparats liegt, deren abgeschliffene Kanten die Bahn bilden. Es ist also erforderlich, dem hervorstehenden Rande des Stahlstückes, in welchem sich der Sapphir, am zweiten Ende des Etalons, befindet, eine Form zu geben, welche diese Berührung nicht hindert, dennoch aber Metall genug behält, um durch einen starken Schraubenzieher gedrehet werden zu können, welcher in einen, in den Rand gemachten Einschnitt gesetzt wurde. Die 9te Figur zeigt diese Form im Durchschnitte; ihre Oberfläche ist kugelförmig, mit 9 Lin. Halbmesser ausgearbeitet, wodurch sie aufser Berührung mit der kleineren Kugelfläche des Cylinders, von 8,5 Lin. Halbmesser, gesetzt wird. — Als die Berichtigung des Stabes gemacht werden sollte, setzte man den Sapphir ein, schraubte das Endstück fest und maafs nun, auf dem beschriebenen Apparate, die Entfernung der beiden Sapphirflächen. Fand sie sich gröfser oder kleiner, als sie sein sollte, so nahm man das Endstück wieder heraus und drehete die Schraube rechts oder links, worauf eine neue, nach der Zusammensetzung vorgenommene Messung den Erfolg der Verbesserung angab. Um den Versuchen dieser Art einige Regelmäfsigkeit zu geben, versah Hr. *Baumann* den, zur Drehung

Digitized by Google

des Schraubenkopfes *e* dienenden Schlüssel mit einem Zeiger, welcher die Gröfse der jedesmaligen Drehung auf einer eingetheilten Scheibe (Taf. III Fig. 16) angab, und da man den Werth eines Schraubenganges kannte, auch zeigte, wieviel man drehen mufste, um eine Veränderung von beabsichtigter Gröfse hervorzubringen. Die Berichtigung der Länge des Etalons bis auf einige Tausentel einer Linie war sehr leicht; ihre weitere Fortsetzung wurde zeitraubend, da man, je näher man der beabsichtigten Länge schon gekommen war, desto sorgfältiger und öfter wiederholt messen mufste. Indessen gewährte Hrn. *Baumanns* unausgesetzte Hülfe bei diesen Versuchen ihnen den gewünschten Erfolg. — Hr. Oberbergrath *Schaffrinski* war, auf meine Bitte, von der hohen Königl. Verwaltung für Handel, Fabrication und Bauwesen, beauftragt worden, die Versuche zur Berichtigung des Etalons durch seine Gegenwart zu unterstützen. Wir überzeugten uns gemeinschaftlich von dem äufserst nahen Gelingen einer letzten Berichtigung, und veranlafsten darauf Hrn. *Baumann*, den hervorstehenden Rand auch des zweiten Endes des Etalons wegzuschneiden. Beide Enden wurden nun vollkommen gleich, und das Etalon war in dem Zustande, in welchem es bleiben sollte.

Ich darf nicht unerwähnt lassen, dafs die Kegel von Sapphir von Hrn. Oberbergrath *Schaffrinski* geschliffen worden sind, welcher die Kunst und die Einrichtung besitzt, so hartes Material zu bearbeiten. Alles übrige an dem Etalon ist, so wie alle mechanischen Einrichtungen, welche das ganze Geschäft erforderte, von Hrn. *Baumann* verfertigt worden.

§. 8.

Untersuchungen über die Beschaffenheit des Originals des Preufsischen Längenmaafses.

Die Stärke eines Stabes von *Stahl*, von quadratischem, 9 Linien zur Seite habenden Durchschnitte, ist so grofs, dafs die Anwendung einer beträchtlichen Kraft erforderlich ist, um ihm eine, über die Grenzen seiner Elasticität hinausgehende, also nicht spurlos wieder verschwindende, Krümmung zu geben. Ich halte sie für mehr als hinreichend, allen Zufällen zu widerstehen, welche der Stab bei seinen Anwendungen erfahren mögte. Die Einwirkung der Schwere auf die Entfernung seiner Endflächen ist unbedeutend; denn die in der Beilage gegebenen Formeln zeigen, dafs selbst

seine Unterstützung an den Enden, ihn, unter Voraussetzung der dem Eisen zugehörigen specifischen Schwere und Spannkraft, nur um 0,'0000105 verkürzen kann. Man mag also den Stab auflegen wie man will, so behalten seine Endflächen innerhalb der Grenzen, bis auf welche man die Genauigkeit seiner Messung zu treiben hoffen kann, eine gleiche Entfernung.

Die Messung der Länge des Etalons würde am einfachsten sein, wenn die Oberflächen der Sapphire auf seine Längenaxe senkrecht stehende *Ebenen* wären. Sollen sie nicht als solche angenommen werden, so ist es nöthig, ihre Entfernung genau in der Axe des Stabes zu messen. Wenn die Messung durch die Berührung der Endflächen, durch feine, als Punkte anzusehende Spitzen erlangt wird, so mifst man die wahre Länge *unmittelbar*, indem man Mittel anwendet, die Berührungspunkte in die Axe des Stabes zu verlegen; man erhält aber auch die wahre Länge, indem man das Mittel aus zwei Entfernungen dafür annimmt, an Punkten gemessen, welche in einander entgegengesetzten Richtungen von der Axe und in gleichen Entfernungen von ihr liegen. Hierbei werden zwar die Oberflächen als *eben* vorausgesetzt, allein dieses darf immer geschehen, wenn die Entfernung der beiden Punkte von der Axe nur nicht so grofs ist, dafs sie sich von einer, die Oberfläche, in der Axe, berührenden Ebene merklich entfernen. Das, was diese zweite Messungsart fordert, wird einfach erlangt, indem man dem, beziehungsweise auf die Mikrometer, festen Lager des Stabes die Einrichtung giebt, dafs es nicht allein die Höhe desselben, sondern auch seine Lage in der horizontalen Ebene bestimmt, und indem man ihn, zwischen beiden Messungen, in diesem Lager umwendet. Die Kenntnifs der Neigung des als *eben* vorausgesetzten Theils der Endflächen gegen die Axe wird dann unnöthig, und jedes zusammengehörige Paar der Messungen giebt die Länge des Stabes in der Axe. Sie wird aber *nöthig*, wenn die Berührung nicht durch Spitzen, sondern durch Kugelflächen geschieht; denn diese berühren die Endflächen nicht durch das Ende ihres mit der Axe des Stabes zusammenfallenden Halbmessers, sondern, wenn dieses noch davon entfernt ist, schon an einem anderen Punkte. Die unmittelbare Messung eines Stabes, dessen Endflächen nicht senkrecht auf seiner Axe sind, ergiebt also, falls sie durch Berührung derselben durch Kugelflächen erlangt wird, seine Länge immer *zu grofs* und mufs also, durch Rechnung, auf ihr wahres Resultat zurückgeführt werden. Indem die Berührungspunkte sich, mit zunehmender Gröfse des

Digitized by Google

Halbmessers der berührenden Kugelfläche, von der Axe weiter entfernen, kann auch die allgemeine Rechtmäfsigkeit der Voraussetzung bezweifelt werden, dafs sie in einen, um die Axe beschriebenen Raum fallen, der sich, wegen seiner Kleinheit, nicht merklich von einer kleinen ebenen Fläche unterscheidet.

Um hier nichts zu wünschen übrig zu lassen, ist offenbar erforderlich, dafs man eine eigene Untersuchung über die Beschaffenheit der Endflächen eines Stabes vornehme, und, nachdem man diese durch Beobachtung bestimmt hat, die Theorie ihres Einflufses auf die Messungen verfolge. Man kann dieses vermeiden, wenn man die Berührungen nicht durch Kugelflächen, sondern durch feine Spitzen bewirkt; auch ist, in beiden Fällen, *nur* die Bestimmung der *Neigung* der Endflächen nothwendig, wenn sie nicht merklich uneben sind. Ich gab aber der Anwendung von Kugelflächen den Vorzug, weil sehr feine Spitzen der Cylinder des Messungsapparats nicht nur selbst leicht beschädigt werden könnten, sondern auch weniger harte Endflächen als die Sapphire verletzen würden. Ich hätte also eine nähere Untersuchung der Endflächen nur auf Kosten der Sicherheit der Resultate meiner Arbeiten unterlassen können.

Es scheint mir nothwendig, die Beschaffenheit dieses neuen Etalons in dem gegenwärtigen, seiner Verfertigung gewidmeten Abschnitte vollständig abzuhandeln; allein ich werde dadurch gezwungen, eines Theils des Baumannschen Apparates, den ich erst im 6ten Abschnitte beschreiben kann, hier schon zu erwähnen, indem ich ihn, bei der Untersuchung der Endflächen der Sapphire, benutzt habe. Dieser besteht aus zwei Mikrometern, von den im 1sten §. beschriebenen nur dadurch im Wesentlichen verschieden, dafs der Cylinder, dessen eines Ende auf die zu berührende Fläche, das andere auf die Wasserwage wirkt, nicht auf einer von dem Mikrometer getrennten Bahn, sondern auf einer, auf dem Schlitten selbst befindlichen, liegt, die Drehung der Mikrometerschraube also den, die Fläche berührenden, Cylinder in dieser Bahn verschiebt und dadurch seine Wirkung auf die Wasserwage eintreten läfst. Diese höchst feinen und vortrefflichen Mikrometer habe ich von dem Apparate, wozu sie gehören, abgenommen und sie so angewandt, dafs dadurch die Entfernungen verschiedener Punkte der Endflächen, von einer auf die Axe des Stabes senkrechten Ebene, bekannt werden. Diese Punkte liegen in zwei, sich in der Axe des Stabes senkrecht

Digitized by Google

durchschneidenden, den Seitenflächen des Stabes parallelen Ebenen, und zwar in Entfernungen von $\pm$ 0,0981, $\pm$ 0,1962, $\pm$ 0,2943 von der Axe. Um Punkte der Endflächen bestimmt angeben zu können, ist das eine Ende (I) des Stabes, an seinen vier Seiten, durch •, ••, •••, •••• bezeichnet worden; die Entfernung eines unbestimmten Punktes der Oberfläche von der Linie •• — •••• wird durch x, seine Entfernung von der Linie • — ••• durch y angedeutet und zwar werden sie, nach der Seite der gröfseren Zahlen hin, positiv gezählt. Was durch Messungen erlangt werden mufste, waren die Entfernungen z, durch x und y bestimmter Punkte der Oberfläche, von einer auf die Axe des Stabes senkrechten Ebene.

Um diese Entfernungen zu messen, bin ich folgendermaafsen verfahren. Ich habe den Stab auf ein festes Lager gelegt, auf welchem er, ohne Veränderung der Lage seiner Axe, umgewandt werden konnte; dann habe ich beide Mikrometer vor dem Stabe aufeinandergelegt, das untere in senkrechter Richtung auf seine Axe, das obere in paralleler mit derselben, so dafs ich, durch die Schraubenbewegung des ersteren, das letztere in gerader Linie vor der Endfläche des Stabes vorüberbewegen, also, durch seine Schraube, die Werthe von z an verschiedenen Punkten der Oberfläche messen konnte. Die Voraussetzung, dafs die Bewegung dieses Mikrometers der Axe des Stabes parallel vor sich gehe, wurde zwar durch das Auflegen der Mikrometer selbst, in gehöriger Lage, näherungsweise erfüllt; sie wurde aber, durch Wiederholung der Beobachtungen nach der Umlegung des Stabes in seinem festen Lager, ganz aus dem Resultate geschafft. Dafs das obere Mikrometer, bei seiner Bewegung durch die Schraube des unteren, eine durch die Axe des Stabes gehende Linie, und nicht etwa eine ihr parallele beschrieb, erlangte ich durch eine Vorrichtung zum Centriren des Stabes, welche ich im 6ten Abschnitte beschreiben werde. Da es weit einfacher und sicherer war, die Berührungen der Sapphire nicht durch die kugelförmige Endfläche des Mikrometer-Cylinders, sondern durch eine feine Spitze zu bewirken, so ersuchte ich Hrn. *Baumann* um die Verfertigung einer, mit einer Spitze versehenen Hülse, welche, genau passend, auf das vordere Ende des Cylinders geschoben werden konnte.

Die Beobachtungen selbst habe ich viermal wiederholt, nämlich zweimal in beiden Lagen des Stabes auf seinem Lager. Für die Endfläche, an welcher die Punkte verzeichnet worden sind (I), habe ich die Werthe von z,

Digitized by Google

von der auf die Axe des Stabes, in ihrem Durchschnittspunkte mit der Endfläche senkrecht gelegten Ebene an gezählt, gefunden:

a. in der Linie • — • • •, *oder für* $y = 0$

x	1ste Reihe	2te Reihe	Mittel	Paris. Lin.
— $0^{L},2943$	— $0^{R},0308$	— $0^{R},0311$	— $0^{R},0310$	— $0^{L},00379$
— 0,1962	— 0,0203	— 0,0201	— 0,0202	— 0,00248
— 0,0981	— 0,0100	— 0,0101	— 0,0101	— 0,00124
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000
+ 0,0981	+ 0,0092	+ 0,0098	+ 0,0095	+ 0,00117
+ 0,1962	+ 0,0189	+ 0,0197	+ 0,0193	+ 0,00237
+ 0,2943	+ 0,0280	+ 0,0294	+ 0,0287	+ 0,00352

b. in der Linie • • — • • • •, *oder für* $x = 0$

y	1ste Reihe	2te Reihe	Mittel	Paris. Lin.
— $0^{L},2943$	+ $0^{R},0056$	+ $0^{R},0051$	+ $0^{R},0054$	+ $0^{L},00066$
— 0,1962	+ 0,0040	+ 0,0046	+ 0,0043	+ 0,00053
— 0,0981	+ 0,0012	+ 0,0025	+ 0,0018	+ 0,00023
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000
+ 0,0981	— 0,0022	— 0,0009	— 0,0016	— 0,00019
+ 0,1962	— 0,0049	— 0,0035	— 0,0042	— 0,00052
+ 0,2943	— 0,0065	— 0,0053	— 0,0059	— 0,00073

Für die andere Endfläche (II) habe ich diese Werthe gefunden:

a. in der Linie • — • • •, *oder für* $y = 0$

x	1ste Reihe	2te Reihe	Mittel	Paris. Lin.
— $0^{L},2943$	+ $0^{R},0110$	+ $0^{R},0126$	+ $0^{R},0118$	+ $0^{L},00145$
— 0,1962	+ 0,0072	+ 0,0092	+ 0,0082	+ 0,00101
— 0,0981	+ 0,0037	+ 0,0047	+ 0,0042	+ 0,00051
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000
+ 0,0981	— 0,0047	— 0,0025	— 0,0036	— 0,00045
+ 0,1962	— 0,0085	— 0,0076	— 0,0080	— 0,00099
+ 0,2943	— 0,0129	— 0,0117	— 0,0123	— 0,00150

Digitized by Google

b. in der Linie •• — ••••, *oder für* $x = 0$

y	1ste Reihe	2te Reihe	Mittel	Paris. Lin.
$- 0^L,2943$	$+ 0^R,0045$	$+ 0^R,0069$	$+ 0^R,0057$	$+ 0^L,00070$
− 0,1962	+ 0,0035	+ 0,0050	+ 0,0043	+ 0,00053
− 0,0981	+ 0,0023	+ 0,0031	+ 0,0027	+ 0,00033
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000
+ 0,0981	− 0,0039	− 0,0030	− 0,0034	− 0,00042
+ 0,1962	− 0,0078	− 0,0075	− 0,0077	− 0,00094
+ 0,2943	− 0,0134	− 0,0135	− 0,0134	− 0,00164

In diesen Messungen zeigen sich deutliche, wenn auch kleine Spuren der Krümmung der Oberflächen der Sapphire; wenn man die kleineren derselben auch nicht beachten will, so kann man doch nicht zweifeln, dafs die Linie •• — •••• der Endfläche II nicht gerade ist, denn man kann die Zahlen der letzten Columne des diese Linie betreffenden Verzeichnisses, mit dieser Annahme, nicht näher als bis auf $0^L,0004$ vereinigen, welche Gröfse die Unsicherheit der Angaben selbst weit überschreitet. Wenn man von den Sapphirflächen Licht reflectiren läfst, so wird gleichfalls eine Krümmung derselben sichtbar, welche sich der cylindrischen nähert und vermuthlich, in dieser Art, aus der Operation des Schleifens entstanden ist. Aus den Messungen geht hervor, dafs der ganze Raum, über welchen sie sich erstrecken, nämlich der Raum eines mit dem Halbmesser $0^L,2943$ um die Axe beschriebenen Kreises, nicht mehr als *eben* angenommen werden darf, wenn in der gemessenen Länge des Etalons nicht Fehler von $0^L,0004$ möglich werden sollen.

Um die Figur der Endflächen und ihre Lage gegen die Axe des Stabes näher kennen zu lernen, habe ich die Messungen mit der Annahme:

$$z = ax + by - (cx - dy)^2$$

verglichen, welches die Annahme einer cylindrischen Figur der Endflächen ist. Die wahrscheinlichsten, aus den Messungen folgenden Werthe der Coefficienten dieser Formel sind:

für die Endfläche	I	II
a	+ 0,01239	− 0,00503
b	− 0,00244	− 0,00390
c	± 0,03948	± 0,01282
d	± 0,01708	± 0,07350

Digitized by Google

Diese Werthe stellen sämmtliche Messungen bis auf Kleinigkeiten dar, bis auf welche sie nicht verbürgt werden können; nämlich bis auf

x und y	I		II	
$-\,0^{L},2943$	$+\,0^{L},00001$	$+\,0^{L},00003$	$+\,0^{L},00001$	$-\,0^{L},00002$
$-\,0,1962$	$-\,0,00001$	$-\,0,00006$	$-\,0,00003$	$+\,0,00008$
$-\,0,0981$	$+\,0,00001$	$+\,0,00001$	$-\,0,00002$	$-\,0,00001$
$+\,0,0981$	$+\,0,00004$	$-\,0,00005$	$+\,0,00004$	$-\,0,00001$
$+\,0,1962$	$0,00000$	$+\,0,00003$	$0,00000$	$+\,0,00002$
$+\,0,2943$	$-\,0,00001$	$-\,0,00001$	$0,00000$	$+\,0,00002$

Nachdem hierdurch die Oberflächen der Sapphire, unter der Annahme der Form des Ausdruckes von z, bestimmt worden sind, mufs die Entfernung μ des in der Axe des Mikrometer-Cylinders liegenden Punktes seiner kugelförmigen Endfläche von der Ebene der z aufgesucht werden: sie ist die Gröfse, um welche das Mikrometer noch vorgeschoben werden müfste, wenn sein Cylinder die Ebene der z berühren, oder die Messung die wahre Länge des Stabes ergeben sollte. Die Axe dieses Cylinders ist der Axe des Stabes parallel, aber sie soll nicht mit ihr zusammenfallend angenommen werden, sondern durch Punkte gehen, deren auf die Axen der x und y bezogene Coordinaten ich durch α und β bezeichnen werde. Bezeichnet man ferner die auf die Axe der z bezogene Coordinate des Mittelpunkts der kugelförmigen Endfläche des Mikrometer-Cylinders durch γ, ihren Halbmesser durch r, so hat man, durch die Bedingung, dafs ein Punkt dieser Endfläche einen Punkt der Endfläche des Stabes *berühre*, die Gleichungen

$$rr = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

$$0 = x-\alpha + (z-\gamma)\frac{dz}{dx} = x-\alpha + (z-\gamma)\{a-2c(cx-dy)\}$$

$$0 = y-\beta + (z-\gamma)\frac{dz}{dy} = y-\beta + (z-\gamma)\{b+2d(cx-dy)\}.$$

Da $\gamma = r+\mu$ ist und in den beiden letzten Gleichungen $-r$ für $z-\gamma$ gesetzt, auch das Quadrat von μ vernachlässigt werden kann, so kann man diese Gleichungen in:

Digitized by Google

$$2r(z-\mu) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$
$$0 = x-\alpha - r\{a - 2c(cx-dy)\}$$
$$0 = y-\beta - r\{b + 2d(cx-dy)\}$$

verwandeln, und durch Elimination von x und y,

$$\mu = \tfrac{1}{2} r\{aa+bb\} + a\alpha + b\beta + \frac{\{c\alpha - d\beta + r(ca-db)^2\}}{1+2r(cc+dd)}$$

daraus ableiten. Da aber die Umwendung des Etalons auf seinem festen Lager bei jeder vollständigen Messung nothwendig ist, und sich, durch dieselbe, α und β in $-\alpha$ und $-\beta$ verwandeln, so ist immer das Mittel aus dem vorigen Ausdrucke und dem folgenden:

$$\tfrac{1}{2} r\{aa+bb\} - a\alpha - b\beta + \frac{\{c\alpha - d\beta - r(ca-db)^2\}}{1+2r(cc+dd)}$$

oder

$$\mu = \tfrac{1}{2} r\{aa+bb\} + \frac{rr(ca-db)^2}{1+2r(cc+dd)} + \frac{(c\alpha-d\beta)^2}{1+2r(cc+dd)}$$

zur Verbesserung vollständiger Messungen anzuwenden. Setzt man, um die Rechnung zu erleichtern,

$$a = f\,\mathrm{Cos}\,F \qquad c = g\,\mathrm{Cos}\,G \qquad \alpha = h\,\mathrm{Cos}\,H$$
$$b = f\,\mathrm{Sin}\,F \qquad d = g\,\mathrm{Sin}\,G \qquad \beta = h\,\mathrm{Sin}\,H$$

so wird

$$\mu = \tfrac{1}{2} r\,.\,f^2 + \frac{\{rfg\,\mathrm{Cos}(F+G)^2\}}{1+2rgg} + \frac{\{gh\,\mathrm{Cos}(G+H)^2\}}{1+2rgg}.$$

In dem Werthe von G ist noch die Zweideutigkeit, welche aus der Willkür in der Annahme des Zeichens von $\frac{d}{c}$ entsteht; sie ist die nothwendige Folge davon, daſs die Werthe von z nur in zwei, sich senkrecht durchschneidenden Ebenen gemessen worden sind; die Axe eines Cylinders kann sich nämlich nach der einen oder der anderen Seite einer Ebene gleichviel neigen, ohne daſs dadurch sein Schnitt durch die Ebene geändert würde. Um sie zu beseitigen, muſs man den Quadranten, in welchen G fällt, anderweitig bestimmen, entweder durch Messung von Werthen von z in einer dritten Ebene, oder nach dem bloſsen Augenscheine, falls dieser hinreicht

Digitized by Google

zu zeigen, nach welcher Richtung die *geraden* Schnitte der Endfläche stattfinden. In dem Falle des Originalmaafses läfst die Betrachtung der von den Sapphiren reflectirten Bilder einer geraden Linie keinen Zweifel darüber, dafs diese Schnitte, auf der Endfläche I, mehr gegen die Linie • — •••, als gegen die Linie •• — •••• geneigt sind und, wenn man ihre Richtungen von (•) zählt, vom 1ten Quadranten zum 3ten gehen; auf der Endfläche II sind sie gegen die Linie • — ••• wenig geneigt und gehen vom 2ten zum 4ten Quadranten. Da, für Punkte in diesen Schnitten, $cx - dy = 0$, oder $\frac{y}{x} = \frac{c}{d}$ ist, so geht hieraus hervor, dafs für die Endfläche I, c und d gleiches, für die Endfläche II verschiedenes Zeichen haben; das Zeichen des einen von beiden bleibt aber nothwendig willkürlich und ist auch gleichgültig.

Durch die oben schon angegebenen Werthe von a, b, c, d findet man, dieser Bemerkung zufolge:

Endfläche	I		II	
f und F	0,01263	348° 53′	0,00636	217° 47′
g und G	0,04302	23 24	0,07461	99 54

und ferner den Ausdruck von μ, so wie ihn vollständige Messungen erfordern, für die Endfläche I:

$$\mu = r \,.\, 0{,}0000798 + \frac{rr \,.\, 0{,}000000252}{1 + r \,.\, 0{,}003701} + \frac{0{,}00155 \left\{h \operatorname{Cos}(23^\circ\, 24' + H)\right\}^2}{1 + r \,.\, 0{,}003701}$$

und für die Endfläche II:

$$\mu = r \,.\, 0{,}0000203 + \frac{rr \,.\, 0{,}000000102}{1 + r \,.\, 0{,}011134} + \frac{0{,}00557 \left\{h \operatorname{Cos}(99^\circ\, 54' + H)\right\}^2}{1 + r \,.\, 0{,}011134}.$$

Die Maafseinheit, worauf diese Formeln sich beziehen, ist die Pariser Linie. Das erste Glied beider Formeln ist das, welches allein vorhanden sein würde, wenn die Endfläche mit der sie in der Axe berührenden Ebene zusammenfiele; das zweite ist der Einflufs der Krümmung derselben; das dritte entsteht aus dieser und der Entfernung der Mikrometerlinie von der Axe des Stabes und zeigt den Einflufs, welchen eine mangelhafte Centrirung auf die Messungen ausübt. Da es sehr leicht ist, hierin einen Fehler von einigen Hunderteln einer Linie zu vermeiden, indem man, falls der Messungsapparat nicht, durch seine Einrichtung selbst, ihn ausschliefst, was bei dem im

Digitized by Google

1ten §. beschriebenen der Fall ist, die vorher schon erwähnte, später zu beschreibende Vorrichtung anwendet, so wird das letzte Glied so klein, daſs es nicht wirklich in Betracht kommt.

Die Kenntniſs der Halbmesser der die Endflächen des Etalons berührenden Kugelflächen, welche die Berechnung von μ voraussetzt, kann durch eine passende Abänderung des zur Prüfung der ersteren angewandten Verfahrens, leicht und mit groſser Sicherheit erlangt werden. Ich habe, durch seine einmalige Anwendung, den Werth von r für die vier Cylinder des im 1ten §. beschriebenen Apparats gefunden:

Cylinder des Mikrometers I	$r = 8^L{,}455$
— — — II	8,467
Anschiebe-Cylinder *A*	8,451
— — *B*	8,461.

Setzt man demzufolge $r = 8^L{,}46$, so erhält man den, bei den Messungen des neuen Originals des Preuſsischen Längenmaaſses, auf dem §. 1. beschriebenen Apparate, anzuwendenden Werth von μ:

an der Endfläche I $= + 0^L{,}000675 + 0^L{,}000020 = 0^L{,}000695$
— — II $= + 0{,}000172 + 0{,}000007 = 0{,}000179.$

Man muſs also die unmittelbaren Messungen auf diesem Apparate um die Summe beider Zahlen $= 0^L{,}000874$ verkleinern, damit sie die wahre Länge ergeben.

Man vermeidet, wie ich schon bemerkt habe, die in dem gegenwärtigen Paragraphen ausgeführte Untersuchung, wenn man die Endflächen durch feine Spitzen berührt. Sie betrifft also nicht sowohl das Original des Längenmaaſses selbst, obgleich dieses Data dazu giebt, als den Apparat, womit man es miſst. Da aus ihr hervorgegangen ist, daſs die Anwendung von Kugelflächen zur Berührung keine Unsicherheit, sondern nur eine kleine Rechnung zur Folge hat, so ist kein erheblicher Grund gegen diese Anwendung vorhanden. Ich bemerke übrigens, daſs die sich aus dieser Untersuchung ergebende merkliche Abweichung der Sapphirflächen, von der auf die Axe senkrechten Ebene, vermuthlich aus zwei Ursachen entstanden ist, nämlich sowohl aus der Schwierigkeit, so harte Körper, welche durch die,

Digitized by Google

für weniger harte anwendbaren, mechanischen Hülfsmittel nicht bearbeitet werden können, genau senkrecht auf eine gegebene Axe abzuschneiden, als auch aus der, durch ihr nothwendiges, festes Anschrauben verursachten Zusammendrückung ihrer, aus Gold gemachten, Betten.

Der zur vollständigen Kenntnifs des Originals des Preufsischen Längenmaafses noch nöthigen Untersuchung der Veränderungen, welche es durch die Wärme erleidet, werde ich den folgenden Abschnitt widmen.

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Bestimmung der Änderungen, welche das Original des Preufsischen Längenmaafses durch die Wärme erleidet.

§. 9.

Beschreibung des Apparats.

Die Einrichtungen, wodurch man die Änderungen der Dimensionen fester Körper durch die Wärme zu bestimmen gesucht hat, treffen immer auf die beträchtliche Schwierigkeit, den Messungsapparat gänzlich aufser Einflufs derselben Wärmeverschiedenheiten zu setzen, deren Hervorbringung die Versuche selbst fordern. Ich bin darauf ausgegangen, die Punkte des Apparats, welche bei den Messungen der Veränderungen des Originals des Preufsischen Längenmaafses eine gleiche Entfernung behalten sollten, dadurch unveränderlich zu erhalten, dafs ich sie auf einer Röhre von Messing, in etwa 9 Zoll Entfernung von derselben, befestigte, welche von Innen mit Schnee oder Eis gefüllt und von Aufsen damit umgeben wurde. Allein der dieser Absicht entsprechende, von Hrn. *Baumann* ausgeführte, Apparat führte nicht eher zu der verlangten Sicherheit der Resultate, als bis er eine Änderung erfahren hatte, welche darin bestand, dafs er ohne Schnee oder Eis angewandt, dagegen aber in einem grofsen, mit Wasser gefüllten Troge befestigt wurde, welches die Röhre innen und aufsen und auch noch einen beträchtlichen Theil der Länge der Säulen, welche den Messungsapparat mit ihr verbinden, umgab. Hierdurch wurde es nöthig, die Voraussetzung der immer gleichen Länge der Röhre zu verlassen, und auch von ihrer Veränderung durch die kleinen Wärmeänderungen, welche das sie umgebende Wasser während der Dauer der Versuche erfuhr, Rechnung zu tragen. Der Grund der Nothwendigkeit dieser Abweichung von der anfänglichen Absicht scheint mir aber in dem Aufthauen der erkältenden Substanz zu liegen,

Digitized by Google

welches zur Folge hat, dafs Theile des Apparats, welche an dem Anfange dieses Versuches damit in Berührung sind, sich bei seinem Fortgange davon trennen und nun der Strömung der Wärme, von dem mit einer beträchtlichen Menge warmen Wassers gefüllten Troge, worin das Etalon sich befindet, an den ihn tragenden Säulen, so wie auch an denen, auf welchen der Messungsapparat befindlich ist, hinunter, nicht mehr vollständig widerstehen, so dafs eine Erwärmung der Röhre und eine Verlängerung derselben erfolgt. Diese zeigten die anfänglichen Versuche, und meine Bemühungen, sie durch häufiges Nachfüllen der erkältenden Substanz wegzuschaffen, waren fruchtlos. Durch die Anwendung von Wasser, statt dieser, gewinnt man aber die Überzeugung von der vollkommenen Berührung aller Theile durch dasselbe; auch wird dadurch sicher vermieden, dafs der Apparat selbst, seine Beschaffenheit durch Spannungen ändere, welche das auf und an seinen Theilen liegende Eis, und zwar in veränderlicher Art, ausüben kann. Dieses glaubte ich der Beschreibung des Apparats vorangehen lassen zu müssen.

Auf Taf. IV Fig. 20 und 21 findet man eine perspectivische Abbildung und einen Durchschnitt desselben. Auf einem starken Brette sind die beiden Stützen *aa*, sowohl der die Vorrichtungen zur Messung tragenden Röhre *bb*, als des Etalons *cc* selbst, befestigt; es sind Säulen von Messing, welche, wie die Zeichnungen deutlich machen, da wo die Röhre hindurchgeht, cylindrische Öffnungen von gröfserem Durchmesser, als der der Röhre ist, besitzen. Über diesen Öffnungen setzen sich die Säulen fort und tragen an ihren oberen Enden Rollen, auf welchen das Etalon liegt. Die Säulen sind innen hohl und ihre Wand hat die Dicke einer halben Linie; die bis zu derselben Dicke ausgezogene Röhre ist da, wo sie durch die Säulen geht, von starken Ringen von Glockenmetall umgeben, und in einen von diesen sind, in der Richtung des horizontalen Durchmessers, zwei conische Löcher eingearbeitet, in welche die Spitzen zweier Schrauben eingreifen, deren eine man Fig. 20 sieht; um diese Spitzen kann die Röhre sich bewegen, in der Öffnung der anderen Säule wird sie durch eine Schraube unterstützt. Den Enden der Röhre näher als diese Säulen, ist sie wieder von cylindrischen Ringen von Glockenmetall *dd* umgeben, welche, in lothrechter Richtung, kegelförmig durchbohrt sind, und in diesen Zapfenlöchern die Füfse zweier anderen Säulen *ee* aufnehmen, auf deren oberen Enden die zur Messung

Digitized by Google

dienenden Vorrichtungen befindlich sind. Diese sitzen auf conischen Zapfen von Stahl, welche in Hülsen passen, die, der Axe der Säulen folgend, von ihrem Ende herabgehen.

Die Vorrichtungen zum Messen der Veränderung des Stabes durch die Wärme sind Taf. V Fig. 22 und 23 abgebildet. Auf der einen Säule befindet sich die, sich genau in ihrer Axe in eine Kugelfläche endigende Schraube Fig. 22, gegen welche der Stab durch eine Feder, wie Fig. 20 und 21 zeigen, gedrückt wird. Auf der anderen ist das, mit einem Fühlhebel versehene Mikrometer Fig. 23. Der Fühlhebel berührt die Endfläche des Stabes durch eine Kugelfläche. Beide Vorrichtungen sind ganz von Stahl gemacht. Von dem Ende des Stabes, an welchem er gegen den festen Punkt anliegt, geht ein ihn in der Richtung des anderen Endes ziehender und durch ein Gewicht gespannter Faden, welches so schwer ist, dafs es die Reibung der Lagerrollen des Stabes genau aufhebt und also der Spannung entgegenwirkt, welche diese Reibung in dem Apparate hervorbringen würde. Bei der Anwendung habe ich den Stab immer auf den festen Punkt zugedrückt und ihn dann der Wirkung des eben erwähnten Gewichtes überlassen.

Die Verschiedenheit der Wärme, welche der Stab, während der Versuche erfahren soll, wird durch Wasser hervorgebracht, welches sich in einem Fig. 20 angedeuteten, auf den Säulen *aa*, und zwar auf einem Ansatze derselben, ruhenden Troge befindet. Diese Säulen, so wie auch die den Messungsapparat tragenden äufseren, gehen durch den Boden des Troges hindurch, ohne ihn zu berühren; damit das Wasser nicht durch die Zwischenräume abfliefse, sind Beutel von Blasen, deren oberer Rand am Boden des Troges, der untere an den Säulen befestigt ist, angebracht. Die Wärme des Wassers wird durch das mehr oder weniger starke Eintröpfeln kochenden Wassers und durch stetiges Umrühren möglichst beständig erhalten; es wird Sorge getragen, ihr den Stab, vor der Messung ihrer Wirkung, hinreichend lange auszusetzen. Die jedesmalige Wärme des Wassers ist durch zwei Thermometer gemessen worden.

Das Wasser in dem unteren Troge, in welchem der Apparat steht, und der Fig. 20 und 21 gleichfalls angedeutet ist, wird durch eine eigene, sich um eine Axe drehende Vorrichtung, während der Dauer der Versuche, in unausgesetzter Bewegung erhalten; zur Beobachtung seiner Wärme dienen

Digitized by Google

zwei, an diese Vorrichtung befestigte, und sich dadurch nach und nach von dem Boden des Troges bis zu der Oberfläche des Wassers bewegende Thermometer. Um die den Säulen folgende Einströmung der Wärme von dem oberen Troge in den unteren zu vermindern, sind alle vier Säulen von Trichtern von Blech umgeben, welche man auf den Zeichnungen der Taf. IV bemerkt, und welche, während der Versuche, immer mit Schnee oder kleinen Eisstücken gefüllt erhalten wurden.

Um das Resultat der Versuche von der Voraussetzung zu befreien, dafs das Metall der Säulen *ee* sich allenthalben gleich ausdehne, und nicht etwa aus ihrer Erwärmung eine Veränderung der Entfernung der oberen Enden ihrer Axen hervorgehe, sind diese Säulen durch Zapfen mit der Röhre verbunden, so dafs sie um ihre Axen gedrehet werden können. Nachdem eine Anzahl von Versuchen gemacht war, erhielten die Säulen eine halbe Umdrehung, nach welcher eben so viele Versuche zu den vorigen hinzugefügt wurden.

§. 10.

Prüfungen und Berichtigungen des Apparats.

Wenn die Entfernung der Axen der beiden Säulen *ee* genau so grofs ist wie die Länge des Etalons in der Wärme des schmelzenden Eises, und wenn ferner die die Säulen tragende Röhre, während die Wärme des Etalons geändert wird, ihre Länge nicht ändert, so sind die Veränderungen des Mikrometers, welche man während eines Versuches beobachtet, unmittelbar die Veränderungen der Länge des Etalons, auf seine Länge in der Wärme des schmelzenden Eises bezogen. Ich werde die Entfernung der Säulen, wie sie sich bei den Versuchen zeigte, zuerst angeben.

Sie ist von der Wärme des Wassers im unteren Troge abhängig, also veränderlich. Bei meinen Versuchen gab das Mikrometer, wenn das Etalon die Wärme des schmelzenden Eises besafs, im Mittel $27^{R},66$ an; wenn es aber so gestellt wurde, dafs der Berührungspunkt des Fühlhebels sich in der Axe der Säule befand, so gab es $20^{R},3$ an; oder die Entfernung der Säulen ist $7^{R},36 = 0^{L},89$ kleiner als die Länge des Etalons, welche, in der Wärme von $0° = 417^{L},32$ ist. Da auch das Mikrometer von Stahl ist, wie das Etalon selbst, so kann der Unterschied seiner Angabe von dieser Länge,

Digitized by Google

= 416,43, als die Länge betrachtet werden, deren Veränderung durch die Wärme der Apparat bestimmt. Diese mifst er aber nur dann richtig, wenn das Mikrometer seine, der Axe der Säule entsprechende Angabe, in verschiedener Wärme, ohne Änderung, beibehält. Hr. *Baumann* hat es *ganz* von Stahl verfertigt, damit es, an sich selbst, in verschiedenen Wärmen unveränderlich sein möge; allein diese Maafsregel des denkenden Künstlers durfte die Untersuchung eines Theils des Apparats, der unmittelbaren Einflufs auf die Resultate hat, nicht verhindern, da eine Verschiedenheit der Ausdehnung des Stahls des Körpers des Mikrometers und des Stahls seiner Schraube, wenn auch eine geringe, doch eine merkliche Wirkung äufsern konnte. Diese Untersuchung wurde durch eine, mit einem Ansatze, gegen welchen der Fühlhebel wirken konnte, versehene Klemme (Fig. 24), welche an dem Körper des Mikrometers befestigt wurde, möglich gemacht. Sie drückt, mit einer Schneide, auf die Stahlplatte des Mikrometers, über welcher sein Schlitten sich bewegt, und wird an der Stelle, welche man ihr gegeben hat, durch Druckschrauben festgehalten. Wenn sie aufgesetzt ist, läfst man den Fühlhebel gegen ihren festen, senkrecht über der Schneide befindlichen Ansatz wirken, und beobachtet die dann stattfindende Angabe der Mikrometerschraube, welche, wenn das Mikrometer keinen Einflufs der Wärmeänderungen erfährt, in jeder Wärme unverändert bleiben mufs; wenn es aber nicht frei davon ist, die Abhängigkeit und ihre Gröfse anzeigt. Ich habe diese Angabe, während das Mikrometer sich in Wasser von sehr verschiedener Wärme befand, beobachtet, und dadurch wirklich einen *kleinen* Einflufs entdeckt, welcher zur Folge hat, dafs man die mit dem Apparate gemessene Ausdehnung eines Stabes, für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers, um 0,0001715 einer Drehung der Schraube vergröfsern mufs.

Ferner mufste den Versuchen selbst die Bestimmung der Veränderungen vorangehen, welche Wärmeänderungen des Wassers und der Messingröhre im unteren Troge, in der Entfernung der Säulen *ee* erzeugten. Sie konnte sehr leicht erlangt werden, indem man das Wasser im oberen Troge, durch Vermischung mit vielem Schnee, in beständiger Wärme, also das Etalon in unveränderlicher Länge erhielt, diese Länge aber bei verschiedener Wärme des Wassers im unteren Troge beobachtete. Auf diese Art fand sich, durch zwei Versuchsreihen, zu verschiedenen Zeiten gemacht:

Digitized by Google

Wärme	Mikrometer	Änderung Wärme	Änderung Mikrometer
13°,780	27ᴿ,5175	13°,747	0ᴿ,8271
0,033	28,3446		
13,125	27,5662	13,093	0,7829
0,032	28,3491		

Diese beiden Versuche ergeben die Verbesserung, welche der Angabe des Mikrometers, für die Steigerung der Wärme des Wassers im unteren Troge um einen Grad des hunderttheiligen Thermometers, hinzugesetzt werden mufs = + 0ᴿ,0600; der erste nämlich 0ᴿ,0602, der zweite 0ᴿ,0598. Sie entspricht einer Längenveränderung des Messings der Röhre = 0,0000174.

Die Verwandelung der Angaben der Schraube des Mikrometers in Theile des Längenmaafses machte eine etwas umständliche Untersuchung nöthig, indem es sich, gleich bei den ersten vorläufigen Proben des Apparates zeigte, dafs die Bewegung des Mikrometers, der Veränderung der Angaben seiner Schraubentrommel nicht proportional war. Der Fehler war so beschaffen, dafs er, immer nach einer *ganzen* Drehung der Schraube, in ungeänderter Gröfse wiedererschien. Hr. *Baumann* glaubte, seine Ursache in den Flächen suchen zu müssen, womit die, in der Trommel des Mikrometers befindliche Schraubenmutter und der Körper desselben sich berühren und welche durch die, seinen Schlitten vorwärts schiebende Feder, gegen einander gedrückt werden. Es würde ihm leicht geworden sein, den Fehler zu verbessern, allein dieses konnte nicht ohne die Zurücksendung des Apparates von Königsberg nach Berlin, also nicht ohne einen Zeitverlust geschehen, welcher vermieden werden mufste, weil dadurch die Jahrszeit verstrichen sein würde, in welcher ich darauf rechnen konnte, die zu den Versuchen erforderliche Menge Schnee zur Verfügung zu haben; auch würde ich mich, selbst ohne diesen Grund gegen die Zurücksendung, nicht dazu entschlossen haben, indem ich mich in dem Besitze einer Methode befand, die Fehler von Mikrometerschrauben vollständig zu erkennen und sie durch Rechnung zu verbessern, also auf eine Art, welche hinter keinem mechanischen Verbesserungsmittel zurücksteht.

Das Wesentliche dieser Methode ist, dafs ein bestimmter, nicht einer, oder mehreren *ganzen* Drehungen der Schraube gleicher, übrigens unbe-

kannter Zwischenraum, von *verschiedenen* Punkten der Schraube aus, gemessen und dafs dann die Formel gesucht wird, welche diese verschiedenen Messungen in Übereinstimmung bringt. Um sie in dem gegenwärtigen Falle anzuwenden, legte ich eine, von zwei, zu zwei Zehntel einer Linie getheilte Scale auf den Schlitten des Mikrometers und stellte ein mit Kreuzfäden versehenes Mikroskop darüber auf, so dafs ich den Zwischenraum zwischen zwei bestimmten Strichen derselben, mittelst der Mikrometerschraube, durch die Absehenslinie des Mikroskops führen und seine Gröfse durch die Schraube messen konnte; nachdem eine, von dem Anfangspunkte der Theilungen der Schraubentrommel ausgehende Messung gemacht war, wurden nach und nach die einzelnen Zehntel ihres Umfanges zu Anfangspunkten der Messungen gemacht. Auf diese Art fing ich diese Messungen bei allen Zehnteln, von $25^R,0$ bis $28^R,9$ der Schraube an, wiederholte jede 10 Mal und nahm nun die Mittel aus den Wiederholungen, welche folgende Tafel enthält:

Anfang	Zwischenr.	Anfang	Zwischenr.	Anfang	Zwischenr.	Anfang	Zwischenr.
$25^R,0$	$1^R,6493$	$26^R,0$	$1^R,6452$	$27^R,0$	$1^R,6413$	$28^R,0$	$1^R,6407$
25,1	1,6517	26,1	1,6476	27,1	1,6428	28,1	1,6436
25,2	1,6606	26,2	1,6610	27,2	1,6562	28,2	1,6550
25,3	1,6784	26,3	1,6720	27,3	1,6732	28,3	1,6707
25,4	1,6909	26,4	1,6886	27,4	1,6865	28,4	1,6852
25,5	1,6984	26,5	1,6978	27,5	1,6989	28,5	1,6952
25,6	1,7032	26,6	1,7027	27,6	1,7012	28,6	1,6986
25,7	1,6923	26,7	1,6906	27,7	1,6914	28,7	1,6871
25,8	1,6733	26,8	1,6683	27,8	1,6716	28,8	1,6672
25,9	1,6519	26,9	1,6524	27,9	1,6502	28,9	1,6508

Da hieraus hervorgeht, dafs die Fehler der Messungen, welche durch die Schraube des Mikrometers erzeugt werden, äufserst nahe *periodisch* sind, so kann der Zwischenraum zwischen den beiden Örtern, welche ein bestimmter Punkt des Mikrometerschlittens einnimmt, indem die Schraube erst auf $25^R,0$, dann auf a gestellt ist, durch die Formel:

$$\frac{1}{m}\left\{a - \text{Const.} + \alpha(a-25)^2 + \alpha' \operatorname{Cos} a + \beta' \operatorname{Sin} a + \alpha'' \operatorname{Cos} 2a + \beta'' \operatorname{Sin} 2a + \ldots\ldots\right\}$$

ausgedrückt werden, in welcher α, α', β'..... durch die angeführten Beobachtungen bestimmt werden müssen, und m die Anzahl hierdurch berich-

Digitized by Google

tigter Drehungen bedeutet, welche einer *Linie* gleich sind. Bezeichnet man die an der Schraube beobachteten Bewegungen des Mikrometers durch den unbekannten Zwischenraum (i) zwischen den beiden angewandten Strichen der Scale, durch b, so hat man hieraus den Ausdruck von i:

$$mi = b + ab(2a+b-50) + \alpha'(\mathrm{Cos}(a+b) - \mathrm{Cos}\,a) + \beta'(\mathrm{Sin}(a+b) - \mathrm{Sin}\,a) + \text{etc.} \ldots$$

welchem Ausdrucke durch beständige Werthe von mi, α, α', β', ... Genüge geleistet werden mufs. Da das von α abhängige Glied nicht periodisch ist, so kann es, getrennt von den periodischen, durch blofse Vergleichung der auf gleichen Zeilen des mitgetheilten Verzeichnifses der Beobachtungen stehenden Zahlen, bestimmt werden. Ich finde dafür die Gleichung:

$$200 \,.\, b \,.\, \alpha = +\, 0{,}^{R}1806$$

und, da der mittlere Werth von $b = 1{,}^{R}6730$ ist,

$$\alpha = +\, 0{,}^{R}00054;$$

wodurch also angedeutet wird, dafs der Werth einer Schraubendrehung, bei dem Fortschreiten des Mikrometers, sich etwas Weniges vergröfsert. Indem man den von α abhängigen Theil von den beobachteten Werthen von b trennt, werden sie rein-periodisch und ergeben nun, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt,

$$\alpha' = -\, 0{,}^{R}01131 \qquad \beta' = -\, 0{,}^{R}01276$$
$$\alpha'' = +\, 0{,}00082 \qquad \beta'' = +\, 0{,}00235$$

die späteren Glieder der Formel aber von unbedeutender und nicht mehr mit Sicherheit bestimmbarer Gröfse. Um zu erfahren, in wiefern die Annahme des berichtigten Werthes von a, welcher nun aus der Formel:

$$a + (a-25)^2\, 0{,}^{R}00054 - 0{,}^{R}01131\,\mathrm{Cos}\,a - 0{,}^{R}01276\,\mathrm{Sin}\,a + 0{,}^{R}00082\,\mathrm{Cos}\,2a + 0{,}^{R}00235\,\mathrm{Sin}\,2a$$

hervorgeht, die gemachten Beobachtungen über die Beschaffenheit der Schraube darstellt, habe ich sie damit verglichen und theile hier die übrigbleibenden Unterschiede mit:

Digitized by Google

$25^{R},0$	+ $0^{R},0023$	$26^{R},0$	+ $0^{R},0001$	$27^{R},0$	— $0^{R},0019$	$28^{R},0$	— $0^{R},0008$
25,1	+ 0,0014	26,1	— 0,0003	27,1	— 0,0031	28,1	— 0,0006
25,2	— 0,0002	26,2	+ 0,0020	27,2	— 0,0007	28,2	0,0000
25,3	+ 0,0039	26,3	— 0,0003	27,3	+ 0,0026	28,3	+ 0,0021
25,4	+ 0,0017	26,4	+ 0,0013	27,4	+ 0,0010	28,4	+ 0,0016
25,5	— 0,0042	26,5	— 0,0030	27,5	— 0,0001	28,5	— 0,0019
25,6	— 0,0016	26,6	— 0,0003	27,6	— 0,0001	28,6	— 0,0010
25,7	— 0,0004	26,7	— 0,0004	27,7	+ 0,0022	28,7	— 0,0008
25,8	+ 0,0007	26,8	— 0,0031	27,8	+ 0,0024	28,8	— 0,0008
25,9	— 0,0024	26,9	— 0,0001	27,9	— 0,0007	28,9	+ 0,0017

Aus der Kleinheit dieser, ohne Zweifel zum Theil meinen Beobachtungen zur Last fallenden Unterschiede, geht hervor, dafs die Berichtigung der Schraubenangaben durch Rechnung, ihren Zweck erreicht hat. Es ist also nur noch erforderlich, dafs der Werth einer so berichtigten Drehung der Schraube, oder das *m* der obigen Formel, bestimmt werde.

Zu diesem Zwecke wurden die Zwischenräume von 0,6 zu 0,6 Lin. eines von den Herren *Pistor* und *Schiek* verfertigten, von 0,2 zu 0,2 Linien eingetheilten Pariser Zolles, durch das Mikrometer des Apparates gemessen, indem ich immer von $25^{R},0$ seiner Angabe ausging. Die Beobachtungen sind folgende:

Theilstrich	Mikrometer	Theilstrich	Mikrometer	Zwischenraum	Berichtigte Angabe des Mikrom.
$0^{L},0$	$25^{R},000$	$0^{L},6$	$29^{R},969$	$0^{L},0$ bis $0^{L},6$	$4^{R},9851$
0,6	25,000	1,2	29,990	0,6 — 1,2	5,0040
1,2	25,000	1,8	29,978	1,2 — 1,8	4,9926
1,8	25,000	2,4	29,958	1,8 — 2,4	4,9737
2,4	25,000	3,0	29,951	2,4 — 3,0	4,9672
3,0	25,000	3,6	29,952	3,0 — 3,6	4,9681
3,6	25,000	4,2	29,957	3,6 — 4,2	4,9728
4,2	25,000	4,8	29,936	4,2 — 4,8	4,9531
4,8	25,000	5,4	29,966	4,8 — 5,4	4,9813
5,4	25,000	6,0	29,972	5,4 — 6,0	4,9869
6,0	25,000	6,6	29,943	6,0 — 6,6	4,9597
6,6	25,000	7,2	29,925	6,6 — 7,2	4,9429
7,2	25,000	7,8	29,964	7,2 — 7,8	4,9794
7,8	25,000	8,4	29,948	7,8 — 8,4	4,9643
8,4	25,000	9,0	29,940	8,4 — 9,0	4,9569
9,0	25,000	9,6	29,956	9,0 — 9,6	4,9718

Digitized by Google

Theilstrich	Mikrometer	Theilstrich	Mikrometer	Zwischenraum	Berichtigte Angabe des Mikrom.
$9^L,6$	$25^R,000$	$10^L,2$	$29^R,939$	$9^L,6$ bis $10^L,2$	$4^R,9559$
10,2	25,000	10,8	29,964	10,2 — 10,8	4,9794
10,8	25,000	11,4	29,957	10,8 — 11,4	4,9728
11,4	25,000	12,0	29,962	11,4 — 12,0	4,9775
	Summe				99,4454

Diese Summe ist die Länge des ganzen Zolles, in berichtigten Drehungen der Schraube des Mikrometers ausgedrückt; in Pariser Linien ausgedrückt, ist, wie man, aus einer darüber angestellten Untersuchung, im folgenden Abschnitte sehen wird, dieselbe Länge $= 12^L,0055$. Man erhält also die zur Reduction der Angaben des Mikrometers auf Pariser Linien anzuwendende Zahl

$$m = \frac{99,4454}{12,0055} = 8,2833.$$

§. 11.

Versuche über die Änderungen des Preufsischen Originalmaafses durch die Wärme.

Ich habe diese Versuche im Februar und März 1837 in Königsberg gemacht. Nachdem ich, in den beiden letzten Paragraphen die nöthigen allgemeinen Erläuterungen darüber gegeben habe, ist nur noch Weniges darüber zu bemerken. Die Versuche fangen sämmtlich mit der Erkaltung des Wassers im oberen Troge, durch Schnee, welcher unter das Wasser gemischt wurde, an; dann wurde die Wärme des Wassers, durch hineingeleitete Dampfröhren, oder durch zugegossenes warmes Wasser, vermehrt, und eine zeitlang möglichst beständig erhalten, ehe das Etalon gemessen wurde; wenn die höchste Wärme, welcher ich das Etalon aussetzen wollte, erreicht war, so erhielt ich es eine zeitlang in diesem Zustande und maafs später aufs Neue; endlich wurde das Wasser wieder erkaltet so wie am Anfange des Versuchs. Indem die kleinen Schwankungen der Wärme des Wassers im oberen Troge, welche die Thermometer verriethen, mit ähnlichen, aber nicht gleichzeitigen Schwankungen der Wärme des Etalons verbunden sein mufsten, war es angemessen, jede Angabe nicht auf eine einzelne Einstellung des Mikrometers

Digitized by Google

zu gründen, sondern auf eine Anzahl von gewöhnlich 6 derselben, in Zwischenzeiten von zwei Minuten gemacht. Die Thermometer waren, nach der bekannten, von mir gegebenen Methode, genau berichtigt. Die Erwärmung des Wassers im oberen Troge habe ich nie über 40° C. getrieben; theils weil ich fürchtete, daſs eine gröſsere Wärme einen bleibenden Einfluſs auf die Länge des Etalons erhalten könnte, theils weil es nicht gelungen sein würde, diese Wärme einigermaaſsen beständig zu erhalten.

Ich habe, in der Beschreibung des Apparats, der die Säulen umgebenden Trichter gedacht, deren Füllung mit Schnee das Herabströmen der Wärme von dem oberen Troge in den unteren zu vermindern beabsichtigte. Ich wünschte aber zu erfahren, ob die Unterlassung dieser Füllung einen merklichen Einfluſs auf die Resultate äuſsern werde, und machte daher zwei Versuche, den ersten und den letzten, ohne dieselbe. Ein mittlerer Einfluſs geht aus diesen Versuchen nicht hervor, aber ihre einzelnen Momente stimmen weniger gut untereinander überein, als bei den übrigen der Fall ist.

In dem folgenden Verzeichnisse der Versuche enthält die erste Columne die mittlere Zeit der Beobachtung, die zweite und dritte die beobachtete Wärme des Wassers in dem unteren und in dem oberen Troge, die 4te die Angabe des Mikrometers, die 5te ihre, nach der Formel des vorigen Paragraphs berechnete Berichtigung, die 6te ihre Reduction auf die Wärme, welche das Mittel aus den in der zweiten Columne angegebenen Wärmen ist, die 7te endlich die Summe der drei vorangehenden Columnen, also die in beiden Beziehungen verbesserte Angabe des Mikrometers. Wenn man die Veränderung *dieser* Angabe, für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers, durch x bezeichnet, die Wärme des Wassers im oberen Troge durch t, die Angabe selbst durch m, so sollte

$$m - t \,.\, x$$

für jedes Moment eines Versuches eine gleiche Gröſse erlangen, welches also die Bedingung ist, der gemäſs x so bestimmt werden muſs, daſs die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Unterschiede ein Minimum wird. Die aus jedem Versuche folgende Gleichung zur Bestimmung von x habe ich ihm beigeschrieben und in der letzten Columne die übrigbleibenden, sich auf den ihr genügeleistenden Werth von x beziehenden Unterschiede angeführt.

Digitized by Google

1ster *Versuch.* 1837 *Febr.* 20. (Kein Schnee in den Trichtern).

h ′	°	°	‴	‴	‴	‴	‴
23 29	13,809	0,124	27,5960	+ 0,0227	− 0,0360	27,5827	− 0,0094
1 32	14,088	16,813	28,1760	− 0,0097	− 0,0193	28,1470	− 0,0188
1 59	14,229	25,063	28,4665	+ 0,0146	− 0,0108	28,4703	+ 0,0208
2 31	14,525	34,410	28,7508	+ 0,0194	+ 0,0070	28,7772	+ 0,0054
3 4	14,746	23,926	28,3837	+ 0,0039	+ 0,0202	28,4078	− 0,0026
3 31	14,817	16,473	28,1232	− 0,0094	+ 0,0245	28,1383	− 0,0158
3 56	14,650	0,217	27,5793	+ 0,0221	+ 0,0145	27,6159	+ 0,0207
	14,409						

Resultat $0 = 33{,}810 - 983{,}44\,x$; $x = 0{,}03438$‴

2ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 21.

h ′	°	°	‴	‴	‴	‴	‴
23 30	13,371	0,166	27,7123	+ 0,0194	+ 0,0020	27,7337	− 0,0007
0 5	13,384	35,814	28,9627	+ 0,0002	+ 0,0028	28,9657	+ 0,0005
0 36	13,492	35,006	28,9250	+ 0,0026	+ 0,0092	28,9368	− 0,0005
1 55	13,104	0,258	27,7347	+ 0,0174	− 0,0139	27,7382	+ 0,0007
	13,338						

Resultat $0 = 42{,}788 - 1239{,}23\,x$; $x = 0{,}03453$‴

3ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 21.

h ′	°	°	‴	‴	‴	‴	‴
20 30	11,030	0,104	27,8803	+ 0,0027	− 0,0152	27,8678	− 0,0075
21 43	11,114	34,315	29,0566	− 0,0040	− 0,0102	29,0424	− 0,0092
22 40	11,559	34,373	29,0500	− 0,0038	+ 0,0166	29,0628	+ 0,0092
23 18	11,429	0,049	27,8683	+ 0,0038	+ 0,0088	27,8809	+ 0,0075
	11,283						

Resultat $0 = 40{,}376 - 1174{,}28\,x$; $x = 0{,}03438$‴

4ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 22.

h ′	°	°	‴	‴	‴	‴	‴
2 34	11,488	0,038	27,8667	+ 0,0040	+ 0,0002	27,8709	− 0,0090
3 8	11,425	32,783	29,0128	− 0,0024	− 0,0035	29,0069	− 0,0060
3 32	11,528	32,463	29,0075	− 0,0022	+ 0,0026	29,0079	+ 0,0060
4 12	11,494	0,101	27,8886	+ 0,0019	+ 0,0006	27,8911	+ 0,0090
	11,484						

Resultat $0 = 36{,}668 - 1059{,}77\,x$; $x = 0{,}03460$‴

Digitized by Google

5ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 23.

h ′	°	°	″	″	″	″	″
23 34	11,729	0,032	27,8100	+ 0,0098	− 0,0079	27,8119	− 0,0035
0 18	11,900	37,271	29,0893	− 0,0049	+ 0,0024	29,0868	+ 0,0006
0 38	12,050	35,872	29,0295	− 0,0031	+ 0,0114	29,0378	− 0,0007
1 51	11,763	0,237	27,8233	+ 0,0084	− 0,0058	27,8259	+ 0,0035
	11,861						

Resultat $0 = 45{,}341 - 1328{,}63\, x;\quad x = 0{,}''03413$

6ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 24.

h ′	°	°	″	″	″	″	″
23 9	12,503	0,034	27,8003	+ 0,0108	+ 0,0054	27,8165	+ 0,0118
23 52	12,488	33,599	28,9486	+ 0,0010	+ 0,0045	28,9541	− 0,0142
0 24	12,579	32,237	28,9232	+ 0,0028	+ 0,0098	28,9358	+ 0,0147
1 52	12,083	0,080	27,8032	+ 0,0105	− 0,0198	27,7939	− 0,0124
	12,413						

Resultat $0 = 37{,}466 - 1080{,}78\, x;\quad x = 0{,}''03467$

Nach diesem Versuche wurden die Säulen um 180° gedrehet.

7ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 25.

h ′	°	°	″	″	″	″	″
20 28	13,746	0,080	27,4350	+ 0,0074	+ 0,0148	27,4572	− 0,0039
21 15	13,450	33,630	28,6153	+ 0,0264	− 0,0030	28,6387	− 0,0040
21 49	13,500	33,242	28,6067	+ 0,0263	0,0000	28,6330	+ 0,0040
22 33	13,304	0,119	27,4667	+ 0,0114	− 0,0118	27,4663	+ 0,0039
	13,500						

Resultat $0 = 39{,}142 - 1111{,}39\, x;\quad x = 0{,}''03522$

8ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 25.

h ′	°	°	″	″	″	″	″
23 6	12,950	0,322	27,5017	+ 0,0157	+ 0,0077	27,5251	+ 0,0106
23 56	12,917	34,890	28,7153	+ 0,0227	+ 0,0057	28,7437	+ 0,0067
0 18	12,978	34,554	28,6843	+ 0,0247	+ 0,0094	28,7184	− 0,0068
2 11	12,442	0,274	27,5063	+ 0,0189	− 0,0228	27,5024	− 0,0104
	12,822						

Resultat $0 = 41{,}910 - 1185{,}13\, x;\quad x = 0{,}''03536$

Digitized by Google

9ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 26.

h ′	°	°	R	R	R	R	R
20 9	13,921	0,026	27,5287	+ 0,0185	+ 0,0174	27,5646	− 0,0069
20 54	13,629	36,464	28,8053	+ 0,0139	− 0,0001	28,8191	− 0,0109
21 27	13,634	35,148	28,7792	+ 0,0165	+ 0,0002	28,7959	+ 0,0113
21 56	13,338	0,056	27,5747	+ 0,0218	− 0,0175	27,5790	+ 0,0065
	13,631						

Resultat $0 = 44{,}211 - 1280{,}00\, x$; $x = 0^R{,}03454$

10ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 27.

h ′	°	°	R	R	R	R	R
0 37	14,246	0,027	27,5078	+ 0,0163	+ 0,0494	27,5735	− 0,0055
2 19	13,183	32,583	28,7055	+ 0,0234	− 0,0144	28,7145	− 0,0013
2 41	13,242	32,550	28,7032	+ 0,0235	− 0,0108	28,7159	+ 0,0013
3 20	13,019	0,039	27,5865	+ 0,0226	− 0,0242	27,5849	+ 0,0055
	13,423						

Resultat $0 = 36{,}958 - 1058{,}42\, x$; $x = 0^R{,}03492$

11ter *Versuch.* 1837 *Febr.* 28.

h ′	°	°	R	R	R	R	R
23 35	13,896	0,041	27,4940	+ 0,0149	+ 0,0018	27,5107	+ 0,0001
0 6	13,865	32,357	28,6346	+ 0,0264	− 0,0001	28,6609	+ 0,0038
0 25	13,932	33,108	28,6498	+ 0,0261	+ 0,0040	28,6799	− 0,0038
1 0	13,770	0,089	27,5023	+ 0,0158	− 0,0058	27,5123	− 0,0001
	13,866						

Resultat $0 = 37{,}866 - 1067{,}44\, x$; $x = 0^R{,}03547$

12ter *Versuch.* 1837 *März* 1. (Kein Schnee in den Trichtern).

h ′	°	°	R	R	R	R	R
20 49	12,369	0,100	27,6354	+ 0,0230	− 0,0230	27,6358	+ 0,0239
21 27	12,538	35,260	28,8295	+ 0,0112	− 0,0128	28,8279	+ 0,0039
21 53	12,975	35,242	28,8081	+ 0,0136	+ 0,0134	28,8351	− 0,0039
22 27	13,125	0,074	27,5460	+ 0,0200	+ 0,0222	27,5872	− 0,0238
	12,752						

Resultat $0 = 42{,}901 - 1236{,}50\, x$; $x = 0^R{,}03470$

Digitized by Google

Die Zusammenstellung dieser Versuche ergiebt:

vor der Drehung der Säulen		nach der Drehung der Säulen	
1*	983,44 x = 33,810	7	1111,39 x = 39,142
2	1239,23 x = 42,788	8	1185,13 x = 41,910
3	1174,28 x = 40,376	9	1280,00 x = 44,211
4	1059,77 x = 36,668	10	1058,42 x = 36,958
5	1328,63 x = 45,341	11	1067,44 x = 37,866
6	1080,78 x = 37,466	12*	1236,50 x = 42,901
Summe........	5882,69 x = 202,639	....	5702,38 x = 200,087

Von den Summen sind der erste und der letzte Versuch, welche beide ohne die Füllung der Trichter mit Schnee gemacht worden sind, ausgeschlossen; sie ergeben:

$$x = 0\overset{R}{,}03445 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; x = 0\overset{R}{,}03509.$$

Das Mittel dieser beiden Zahlen ist frei von der Voraussetzung der allenthalben gleichen Veränderlichkeit der Säulen durch die Wärme. Um daraus die wahre Gröfse der Veränderung, welche einer Wärmeänderung von 1° des hunderttheiligen Thermometers zukommt, zu erhalten, mufs der Einflufs derselben Ursache auf das Mikrometer, dem vorigen Paragraph zufolge $= + 0\overset{R}{,}00017$, hinzugefügt werden. Die Veränderung der Länge des Etalons selbst ist, wie gleichfalls aus dem vorigen Paragraph hervorgeht, im Verhältnifse $\frac{417,32}{416,43}$ gröfser. Man erhält also diese Veränderung:

$$= \left\{0\overset{R}{,}03477 + 0\overset{R}{,}00017\right\} \frac{417,32}{416,43} = 0\overset{R}{,}035015$$

oder

$$= 0{,}004227 \text{ Pariser Linien} = 0{,}004375 \text{ Preufs. Linien},$$

die Veränderung der Längeneinheit aber $= 0{,}00001013$.

Aus den Unterschieden der einzelnen Momente der Versuche folgt der mittlere Fehler jedes derselben $= \pm 0\overset{R}{,}01014$, und hieraus wieder der m. F. von $x = \pm 0\overset{R}{,}0000942$; dieser ist der 369ste Theil des Ganzen.

Fünfter Abschnitt.

Messung des Originals des Preufsischen Längenmaafses durch die Toise du Pérou.

Diese Messung ist zweimal ausgeführt worden, zuerst im Jahre 1835 in Berlin; später, im Jahre 1837 in Königsberg. Zu der Wiederholung wurde ich durch die Besorgnifs bewogen, dafs die häufige Erwärmung bis zu fast 40° C., welche das Etalon, bei den Versuchen über die Gröfse seiner Änderung durch die Wärme erfahren hatte, seine Länge *bleibend* geändert haben könnte. Zwar ist dabei sorgfältig vermieden worden, den Übergang von einer Wärme in eine beträchtlich verschiedene, *plötzlich* zu machen; allein es scheint aus vorhandenen Erfahrungen hervorzugehen, dafs auch langsame beträchtliche Änderungen der Wärme bleibende Einflüsse auf feste Körper haben können. Indem ich, von dieser Seite, die Sicherheit der Bestimmung des Verhältnifses des Preufsischen Originalmaafses und der Toise zu vermehren suchte, bemühete ich mich zugleich, die Sicherheit der neuen Bestimmung, auch von anderen Seiten, so hoch wie möglich zu treiben, also nicht nur die Beobachtungen häufig zu wiederholen, sondern auch alle wesentliche Theile des Apparats mit erneueter und durch, in dem Laufe dieser Geschäfte erworbene Erfahrungen geschärfter Aufmerksamkeit zu untersuchen. Hierdurch wird es nöthig werden, den Königsberger Messungen des Etalons einige Hülfsuntersuchungen voranzuschicken. Das was die Berliner Messungen angeht, ist aber schon in den früheren Abschnitten dieser Abhandlung erörtert worden, so dafs ich nur die Messungen selbst mitzutheilen habe.

§. 12.

Erste Reihe der Messungen, im Jahre 1835.

Jedes der folgenden Resultate beruhet auf 4 einzelnen Messungen, nämlich zweien der Toise P, einer der Summe der doppelten Länge des

Digitized by Google

neuen Originalmaafses O' und des Anschiebe-Cylinders A, und einer der Summe $2O'+B$; die beiden letzteren liegen, der Zeit nach, zwischen den beiden ersteren. Das Originalmaafs wurde bei jeder neuen Auflegung umgewandt, so dafs eine Verdoppelung immer beide Lagen enthält. Auch lagen bei einer Hälfte der Messungen die Seiten • und ••• oben, bei der anderen die Seiten •• und ••••.

1835		Wärme	a	a'	n	$2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ – Toise	Paris. Linien	Wärme
Aug. 9	Toise o	14°,77	21'',6450	20'',4513	42'',093			
	$2O'+A$	14,81	22,4555	23,0452	45,503	— 3'',373	— 0^L,4072	14°,815
	$2O'+B$	14,82	22,4541	22,9823	45,438			
	Toise u	14,86	20,2208	21,8756	42,102			
—	Toise u	14,91	20,7593	21,3346	42,096			
	$2O'+A$	14,91	22,3241	23,1683	45,495	— 3,369	— 0,4067	14,91
	$2O'+B$	14,90	22,3268	23,1123	45,442			
	Toise o	14,91	20,8894	21,2121	42,103			
—	Toise o	14,91	20,0352	22,0638	42,105			
	$2O'+A$	14,91	21,4023	24,0913	45,502	— 3,369	— 0,4067	14,885
	$2O'+B$	14,86	21,3976	24,0358	45,442			
	Toise u	14,86	19,0740	23,0144	42,101			
—	Toise u	14,86	19,6204	22,4691	42,099			
	$2O'+A$	14,86	22,3178	23,1857	45,506	— 3,3825	— 0,4084	14,835
	$2O'+B$	14,81	22,3181	23,1306	45,451			
	Toise o	14,81	20,6836	21,4074	42,093			
—	Toise o	13,14	20,9623	21,1606	42,124			
	$2O'+A$	13,14	22,4688	23,0292	45,500	— 3,348	— 0,4042	13,15
	$2O'+B$	13,16	22,4697	22,9699	45,442			
	Toise u	13,16	18,7743	23,3334	42,122			
—	Toise u	13,16	21,0009	21,1176	42,119			
	$2O'+A$	13,14	22,5449	22,9548	45,501	— 3,355	— 0,4050	13,11
	$2O'+B$	13,07	22,5474	22,8960	45,445			
	Toise o	13,08	19,8650	22,2442	42,117			
—	Toise o	13,04	20,6371	21,4778	42,118			
	$2O'+A$	13,08	21,6530	23,8375	45,497	— 3,3505	— 0,4045	13,065
	$2O'+B$	13,06	21,6360	23,7975	45,440			
	Toise u	13,08	19,7626	22,3472	42,118			
—	Toise u	13,14	19,2882	22,8292	42,129			
	$2O'+A$	13,11	22,3658	23,1410	45,509	— 3,363	— 0,4060	13,12
	$2O'+B$	13,10	22,3738	23,0847	45,461			
	Toise o	13,13	20,1482	21,9616	42,115			

Digitized by Google

1835		Wärme	a	a'	α	$2O'+\frac{1}{2}(A+B)-$ Toise	Paris. Linien	Wärme
Aug. 9	Toise o	$13^c,36$	$20^a,0896$	$22^a,0157$	$42^a,111$	$-3^a,360$	$-0^L,4056$	$13^c,42$
	$2O'+A$	13,44	21,2260	24,2608	45,496			
	$2O'+B$	13,42	21,2297	24,2032	45,442			
	Toise u	13,46	19,2131	22,8818	42,107			
10	Toise o	15,79	19,1146	22,9409	42,068	$-3,3575$	$-0,4053$	15,815
	$2O'+A$	15,83	20,5775	24,8755	45,467			
	$2O'+B$	15,83	20,5695	24,8085	45,391			
	Toise u	15,81	20,8040	21,2700	42,075			
—	Toise u	15,99	19,0527	23,0029	42,067	$-3,373$	$-0,4072$	16,07
	$2O'+A$	16,01	22,2993	23,1663	45,468			
	$2O'+B$	16,10	22,2665	23,1404	45,409			
	Toise o	16,18	20,2420	21,8166	42,064			
—	Toise o	16,36	22,2373	19,8305	42,060	$-3,3715$	$-0,4070$	16,355
	$2O'+A$	16,35	22,5850	22,8644	45,450			
	$2O'+B$	16,35	22,5790	22,8213	45,401			
	Toise u	16,36	20,1051	21,9372	42,048			
11	Toise o	17,24	20,0963	21,9334	42,036	$-3,388$	$-0,4090$	17,36
	$2O'+A$	17,33	22,3534	23,1042	45,460			
	$2O'+B$	17,38	22,3535	23,0428	45,399			
	Toise u	17,49	19,9896	22,0506	42,047			
—	Toise u	17,59	21,9890	21,0488	42,038	$-3,379$	$-0,4079$	17,73
	$2O'+A$	17,68	22,5029	22,9407	45,445			
	$2O'+B$	17,84	22,5043	22,8813	45,387			
	Toise o	17,81	17,6708	24,1452	42,036			
—	Toise o	17,89	21,3325	20,7396	42,071	$-3,361$	$-0,4058$	18,02
	$2O'+A$	18,01	22,4058	23,0345	45,442			
	$2O'+B$	18,03	22,4105	22,9744	45,387			
	Toise u	18,16	20,0552	21,9744	42,036			
—	Toise u	17,06	19,8465	22,2151	42,069	$-3,3795$	$-0,4080$	17,06
	$2O'+A$	17,06	22,5492	22,9164	45,467			
	$2O'+B$	17,04	22,5558	22,8563	45,413			
	Toise o	17,08	21,7466	20,3101	42,052			
—	Toise o	17,18	22,0103	20,0583	42,062	$-3,386$	$-0,4088$	17,17
	$2O'+A$	17,19	22,4049	23,0668	45,474			
	$2O'+B$	17,16	22,4115	23,0031	45,417			
	Toise u	17,16	21,5952	20,4653	42,057			
—	Toise u	17,26	20,6631	21,3846	42,050	$-3,3855$	$-0,4087$	17,27
	$2O'+A$	17,24	23,5253	21,9447	45,465			
	$2O'+B$	17,26	23,5315	21,8841	45,410			
	Toise o	17,31	19,5452	21,4991	42,054			

1835		Wärme	a	a'	α	$2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ – Toise	Paris. Linien	Wärme
Aug. 12	Toise o	20°,44	21",6200	20",3504	41",966	— 3",400	— 0^L,4105	20°,49
	$2O'+A$	20,55	22,0118	23,3886	45,405			
	$2O'+B$	20,51	22,0153	23,3325	45,352			
	Toise u	20,46	20,8665	21,1237	41,991			
—	Toise u	20,59	20,8708	21,1067	41,978	— 3,4085	— 0,4115	20,61
	$2O'+A$	20,63	21,3643	24,0342	45,407			
	$2O'+B$	20,60	21,3642	23,9756	45,348			
	Toise o	20,61	20,5868	21,3711	41,960			
—	Toise o	20,69	20,4575	21,5136	41,974	— 3,4175	— 0,4126	20,71
	$2O'+A$	20,73	22,1827	23,2281	45,414			
	$2O'+B$	20,70	22,1862	23,1675	45,357			
	Toise u	20,73	21,4469	22,5176	41,962			
—	Toise u	20,71	22,7001	19,2815	41,971	— 3,4065	— 0,4113	20,76
	$2O'+A$	20,74	21,9994	23,3956	45,399			
	$2O'+B$	20,77	22,0041	23,3368	45,345			
	Toise o	20,83	21,1273	20,8334	41,960			
—	Toise o	20,88	21,6288	20,3416	41,966	— 3,410	— 0,4117	20,885
	$2O'+A$	20,89	22,4442	22,9597	45,405			
	$2O'+B$	20,91	22,4414	22,9021	45,345			
	Toise u	20,86	20,9246	21,0392	41,964			
—	Toise u	20,91	21,7045	20,2661	41,966	— 3,4155	— 0,4123	20,96
	$2O'+A$	20,97	22,2874	23,1125	45,403			
	$2O'+B$	20,97	22,2928	23,0530	45,348			
	Toise o	20,99	20,8033	21,1497	41,954			

Um die Länge des Preufsischen Originalmaafses hieraus zu finden, mufs man $\frac{1}{2}(A+B)$ und die Veränderung, welche $2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ — Toise durch die Wärme erfährt, kennen. Das erstere ist aber schon im 5ten §. bekannt geworden, und die letztere hat sich aus der späteren Wiederholung der gegenwärtigen Messungen, welche in Königsberg in hinreichend verschiedenen Wärmegraden gemacht werden konnten, ergeben; die Ausdehnung von $2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ für jeden Grad der Wärme ist nämlich 0^L,0009805 kleiner als die Ausdehnung der Toise. Wenn eine Messung von $2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ — Toise bei dem Thermometerstande t gemacht ist, so mufs ihr $+$ 0^L,0009805 (t — 16°,25) hinzugefügt werden um sie auf die Normaltemperatur zu reduciren. Man erhält also, indem man die Länge der Toise

Digitized by Google

$= 863^L{,}9992$ und $\frac{1}{2}(A+B) = 28^L{,}81164$ (§. 5.) setzt, und den gemessenen Werth von $2O' + \frac{1}{2}\{A+B\}$ — Toise durch $-d$ bezeichnet:

$$O' = 417^L{,}59378 - \frac{1}{2}d + (t - 16^\circ{,}25)\, 0^L{,}00049025$$

und wenn man die im 8ten §. abgeleitete, von der Figur der Endflächen und dem Halbmesser der sie berührenden Kugelflächen abhängige Verbesserung, gleich hinzufügt, die wahre Länge des Preufsischen Originalmaafses:

$$= 417^L{,}592906 - \frac{1}{2}d + (t - 16^\circ{,}25)\, 0^L{,}00049025.$$

Nach dieser Formel berechnet, ergeben die mitgetheilten 24 Messungen:

		Differ.			Differ.
	L	L		L	L
Aug. 9	417,3886	— 0,0005 . 8	Aug. 11	417,3890	— 0,0001 . 8
	3889	— 0,0002 . 8		3897	+ 0,0005 . 2
	3889	— 0,0002 . 8		3909	+ 0,0017 . 2
	3880	— 0,0011 . 8		3893	+ 0,0001 . 2
	3893	+ 0,0001 . 2		3890	— 0,0001 . 8
	3889	— 0,0002 . 8		3891	— 0,0000 . 8
	3891	— 0,0000 . 8	12	3898	+ 0,0006 . 2
	3884	— 0,0007 . 8		3893	+ 0,0001 . 2
	3887	— 0,0004 . 8		3888	— 0,0003 . 8
10	3900	+ 0,0008 . 2		3895	+ 0,0003 . 2
	3892	+ 0,0000 . 2		3893	+ 0,0001 . 2
	3895	+ 0,0003 . 2		3891	— 0.0000 . 8

Das Mittel aus allen ist

$$417^L{,}38918.$$

Der mittlere Fehler einer Messung ist $= \pm 0^L{,}00055$ und der m. F. des Resultats aller Messungen $= \pm 0^L{,}00011$.

§. 13.

Vorbereitungen für die zweite Reihe der Messungen.

Herr *Baumann* hatte, seit der Zeit der Verfertigung des Apparates, ein Mittel gefunden, Mikrometerschrauben mit einem Grade von Sicherheit zu schneiden, welcher durch das gewöhnliche Verfahren vielleicht schwer zu erreichen ist, sicher aber wenig zu wünschen übrig läfst. Als er den Apparat, im J. 1837, nach Königsberg sandte, benutzte er die Gelegenheit,

Digitized by Google

dieses Mittel in Anwendung zu bringen, indem er für die Mikrometer desselben neue Schrauben verfertigte. Man kann wirklich nicht wissen, ob die Abweichungen untereinander, welche die mit dem Apparate gemachten, bisher mitgetheilten Messungen zeigen, ganz ohne Einfluſs der Schrauben entstanden sind, oder ob diese einen gröſseren oder kleineren Theil daran haben; aber eine *Grenze*, welche dieser Antheil sicher nicht überschreitet, kann man aus den wirklich vorgekommenen Abweichungen, deren mittlere Gröſse ich, für die verschiedenen Anwendungsarten des Apparates, jedesmal angegeben habe, ableiten. Die den Schrauben ungünstigste Annahme, welche mathematisch möglich, aber ganz gewiſs nicht richtig ist, ist, daſs sie die *alleinige* Ursache der Abweichungen seien; verfolgt man sie in dem Falle, welcher sich am meisten dazu eignet, nämlich in dem Falle der unmittelbaren Vergleichung der Toise untereinander (§. 4.), so erhält man den mittleren Fehler einer solchen Vergleichung, nämlich $\pm 0^{L},00106$, aus der Zusammenwirkung von vier Fehlern der Schrauben entstehend, oder den mittleren Fehler der Schrauben $= \pm 0^{L},00053$. Wenn aber eine Schraube einen Fehler, dessen Maximum $= a$ ist, besitzt, welcher dem Sinus oder Cosinus ihres, von einem bestimmten Punkte ihrer Trommel angezählten Drehungswinkels proportional ist, so bringt dieser, in ihre Anwendung, einen mittleren Fehler $= \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$. Aus der Vergleichung beider folgt, daſs die mit den gemachten Anwendungen des Apparats, mathematisch vereinbare Gröſse von $a = 0^{L},00053\sqrt{2} = 0^{L},00075$ oder $0'',0062$ ist. Eine gröſsere periodische Ungleichheit können also die vorigen Schrauben nicht besessen haben, und es kann auch kein Zweifel darüber obwalten, daſs der als mathematisch möglich verfolgte Fall nicht wirklich stattfindet, vielmehr ein beträchtlicher Theil der vorgekommenen Abweichungen der Messungen der Toisen voneinander, aus *anderen* Ursachen entsteht. So klein aber die mittleren Fehler der einzelnen Messungen, ihrer absoluten Gröſse nach, auch sein mögen, so müssen sie doch, durch Beseitigung einer der Ursachen, aus deren Zusammenwirkung sie entstehen, noch verkleinert werden können; wenn die vorigen Schrauben nicht an sich selbst *vollkommen* gewesen sind, was nach meinen Erfahrungen nicht wahrscheinlich ist, so muſs die Verbesserung ihrer Angaben durch die im 10ten §. gegebenen Mittel, die Fehler der Messungen verkleinern. Hr. *Baumann* hat dieses auf mechanischem Wege, durch die neuen Schrauben, zu erlangen gesucht. Ich

Digitized by Google

werde, nichts desto weniger, ihre Prüfung mittheilen, und es wird daraus hervorgehen, in wie ausgezeichnetem Grade der Künstler erfolgreich gewesen ist.

Ich habe das im 10ten §. schon erklärte Verfahren wieder angewandt, allein diesesmal das mit einem Fadenkreuze versehene, achromatische und stark vergröſsernde Mikroskop des Apparats selbst benutzt. Ich habe den Anfang der Messungen des Zwischenraums zwischen zwei Strichen der Scale, nach und nach auf alle Zehntel einer Schraubendrehung, zwischen $15^R,0$ und $23^R,9$ verlegt und dadurch erhalten:

a. Schraubendrehungen des Mikrometers I.

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
15,0	1,668	16,0	1,665	17,0	1,665	18,0	1,667	19,0	1,663	20,0	1,669	21,0	1,669	22,0	1,666	23,0	1,668
15,1	667	16,1	663	17,1	665	18,1	665	19,1	666	20,1	666	21,1	667	22,1	662	23,1	665
15,2	667	16,2	664	17,2	667	18,2	667	19,2	669	20,2	668	21,2	663	22,2	665	23,2	661
15,3	665	16,3	663	17,3	663	18,3	662	19,3	664	20,3	669	21,3	664	22,3	660	23,3	665
15,4	666	16,4	662	17,4	665	18,4	669	19,4	666	20,4	668	21,4	664	22,4	663	23,4	663
15,5	667	16,5	670	17,5	666	18,5	666	19,5	667	20,5	667	21,5	670	22,5	674	23,5	669
15,6	665	16,6	669	17,6	669	18,6	662	19,6	665	20,6	671	21,6	671	22,6	664	23,6	663
15,7	668	16,7	666	17,7	669	18,7	665	19,7	667	20,7	671	21,7	667	22,7	669	23,7	666
15,8	665	16,8	667	17,8	669	18,8	669	19,8	671	20,8	669	21,8	671	22,8	666	23,8	663
15,9	669	16,9	666	17,9	668	18,9	666	19,9	669	20,9	668	21,9	670	22,9	667	23,9	668

b. Schraubendrehungen des Mikrometers II.

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
15,0	1,658	16,0	1,661	17,0	1,660	18,0	1,661	19,0	1,658	20,0	1,663	21,0	1,662	22,0	1,664	23,0	1,659
15,1	656	16,1	659	17,1	660	18,1	657	19,1	663	20,1	661	21,1	662	22,1	659	23,1	659
15,2	652	16,2	652	17,2	659	18,2	660	19,2	661	20,2	660	21,2	665	22,2	664	23,2	658
15,3	657	16,3	658	17,3	661	18,3	656	19,3	662	20,3	657	21,3	664	22,3	659	23,3	661
15,4	655	16,4	658	17,4	661	18,4	661	19,4	658	20,4	660	21,4	663	22,4	662	23,4	659
15,5	657	16,5	662	17,5	661	18,5	661	19,5	662	20,5	660	21,5	662	22,5	664	23,5	661
15,6	659	16,6	658	17,6	663	18,6	663	19,6	659	20,6	662	21,6	662	22,6	663	23,6	664
15,7	656	16,7	659	17,7	663	18,7	664	19,7	665	20,7	661	21,7	665	22,7	659	23,7	663
15,8	661	16,8	656	17,8	657	18,8	662	19,8	660	20,8	661	21,8	662	22,8	662	23,8	663
15,9	656	16,9	661	17,9	659	18,9	662	19,9	655	20,9	659	21,9	664	22,9	659	23,9	664

Man sieht aus diesen Messungen, daſs die Schrauben beider Mikrometer sehr vollkommen sind. Indessen tritt eine kleine, periodisch wiederkehrende Ungleichheit derselben deutlicher hervor, wenn man das Mittel aus jeder der 10 Zeilen beider Verzeichnisse nimmt. Dadurch erhält man:

Digitized by Google

	Mikrometer I	Mikrometer II	Unterschiede vom Mittel I	Unterschiede vom Mittel II
R	R	R	R	R
19,0	1,6667	1,6607	+ 0,0002 . 2	+ 0,0004
19,1	6651	6596	— 0,0013 . 8	— 0,0007
19,2	6657	6592	— 0,0007 . 8	— 0,0011
19,3	6639	6594	— 0,0025 . 8	— 0,0009
19,4	6651	6596	— 0,0013 . 8	— 0,0007
19,5	6684	6611	+ 0,0019 . 2	+ 0,0008
19,6	6666	6614	+ 0,0001 . 2	+ 0,0011
19,7	6676	6617	+ 0,0011 . 2	+ 0,0014
19,8	6678	6604	+ 0,0013 . 2	+ 0,0001
19,9	6679	6599	+ 0,0014 . 2	— 0,0004
Mittel............	1,66648	1,6603		

Die Verbesserung der aus den beiden letzten Columnen hervorgehenden kleinen Ungleichheiten, wird, insofern sie nicht über Cos $2a$ und Sin $2a$ fortgesetzt wird, durch die Formeln:

$$\text{I} \ldots\ldots\; a + \overset{R}{0{,}000461} \operatorname{Cos} a - \overset{R}{0{,}000807} \operatorname{Sin} a + \overset{R}{0{,}000227} \operatorname{Cos} 2a - \overset{R}{0{,}000169} \operatorname{Sin} 2a$$

$$\text{II} \ldots\ldots\; a + 0{,}000044 \operatorname{Cos} a - 0{,}000571 \operatorname{Sin} a + 0{,}000270 \operatorname{Cos} 2a + 0{,}000120 \operatorname{Sin} 2a$$

erlangt. Durch die Anwendung derselben werden die vorher gefundenen Unterschiede auf folgende gebracht:

	I	II
R	R	R
19,0	— 0,0002 . 5	+ 0,0005 . 2
19,1	— 0,0005 . 0	— 0,0002 . 9
19,2	+ 0,0011 . 2	— 0,0001 . 1
19,3	— 0,0007 . 6	+ 0,0003 . 7
19,4	— 0,0006 . 6	— 0,0002 . 3
19,5	+ 0,0014 . 7	+ 0,0001 . 3
19,6	— 0,0008 . 5	— 0,0002 . 4
19,7	+ 0,0000 . 4	+ 0,0004 . 0
19,8	+ 0,0001 . 3	— 0,0001 . 9
19,9	+ 0,0002 . 8	— 0,0003 . 5

Der Gewinn, welchen die Anwendung der Formeln, zur Verbesserung der unmittelbaren Angaben der Mikrometer gewähren kann, ist in der That nur gering, indem er selten ein Zehntausentel einer Linie übersteigt; allein da

Digitized by Google

die Formeln doch die kleinen Unterschiede noch mehr verkleinern, so ist auch kein Grund vorhanden, diesen Gewinn nicht zu benutzen. Ich habe die Formeln also angewandt.

Um auch die Werthe einer ganzen Drehung der Schrauben kennen zu lernen, und um zu erfahren, ob sie in unveränderter Gröfse, oder zu- oder abnehmend fortgehen, habe ich den ganzen *Pistor* und *Schiek*'schen Zoll, von $0^{L}{,}6$ zu $0^{L}{,}6$, wie im 10ten §., gemessen. Die Messungen wurden viermal wiederholt, indem ich von $15^{R}{,}0$ der Mikrometer anfing, und viermal indem ich an der Stelle der Schrauben anfing, wo die vorige Messung sich endigte, welches etwa bei $19^{R}{,}9$ stattfand. Ich erhielt dadurch:

	Mikrometer I		Mikrometer II	
Anfang	R 15,000	R 19,905	R 15,000	R 19,900
L L 0,0 bis 0,6	R 4,912	R 4,9165	R 4,903	R 4,903
0,6 — 1,2	920	932	924	927
1,2 — 1,8	911	906	902	9145
1,8 — 2,4	894	900	895	893
2,4 — 3,0	897	905	8955	904
3,0 — 3,6	9025	9035	900	907
3,6 — 4,2	910	915	902	9125
4,2 — 4,8	894	900	890	889
4,8 — 5,4	910	913	907	917
5,4 — 6,0	923	928	913	919
6,0 — 6,6	895	896	887	8955
6,6 — 7,2	888	891	886	887
7,2 — 7,8	910	911	907	902
7,8 — 8,4	905	9145	9065	9025
8,4 — 9,0	8855	894	8895	8925
9,0 — 9,6	895	9105	9045	907
9,6 — 10,2	8965	900	8775	887
10,2 — 10,8	914	9185	917	923
10,8 — 11,4	913	919	9055	9025
11,4 — 12,0	9195	931	912	919
Summe	98,095	98,2045	98,024	98,104
$\frac{1}{20}$ Zoll = $0^{L}{,}600275$	4,90475	4,91023	4,90120	4,90520

Verbessert man die Anfangs- und Endpunkte des durch die Schrauben gemessenen Raumes durch die obigen Formeln, so verwandeln sie sich in:

Anfangspunkt	$15\overset{R}{,}00069$	$19\overset{R}{,}90608$	$15\overset{R}{,}00031$	$19\overset{R}{,}90034$
Endpunkt	19,90583	24,81609	19,90154	24,80547
Zwischenraum	4,90514	4,91001	4,90123	4,90513

Man erhält daraus den Werth einer Drehung der Schrauben, in Pariser Linien ausgedrückt, an zwei verschiedenen Stellen derselben,

Mikrometer I	Mikrometer II
für $17\overset{R}{,}4532 = 0\overset{L}{,}1223767$	für $17\overset{R}{,}4509 = 0\overset{L}{,}1224768$
$22,3611 = 0,1222553$	$22,3529 = 0,1223770$

und hieraus ferner die Reduction einer beobachteten und durch die periodische Formel verbesserten Angabe a' der Mikrometer auf 20^R, unter der Annahme der Gleichförmigkeit der Veränderung des Werthes der Schraubendrehungen,

$$\text{für das Mikrometer I} = 0\overset{L}{,}1223137\,(a'-20) - 0\overset{L}{,}00001237\,(a'-20)^2$$
$$\text{— — II} = 0,1224249\,(a'-20) - 0,00001018\,(a'-20)^2$$

Eine Tafel, welche die Werthe dieser Reductionen, mit dem Argumente der unmittelbaren Angabe der Mikrometer ergiebt, findet man in der *Beilage* II.

Ich mufs noch zeigen, wie ich die Länge des hier und im 10ten §. angewandten Zolles bestimmt habe. Da die fünffache Länge eines jeden der Anschiebe-Cylinder nahe ein Pariser Fufs und die Länge der halben Summe beider, durch ihre Vergleichung mit der Toise, sehr genau bekannt ist, so konnte die Länge des Zolles gefunden werden, indem man ihr Zwölffaches mit $\frac{5}{2}(A+B)$ verglich. Um diese Vergleichung zu machen, stellte ich zuerst das Cylinder-Mikroskop in der Bahn des Apparats auf, beobachtete seine Stellung durch eins der Mikrometer und legte den Zoll so neben das Lager der Toise, dafs sein Anfangsstrich dem Zeiger des Mikroskops entsprach: dann verschob ich dieses um die ganze Länge des Zolles, dann den Zoll, dann wieder das Mikroskop u. s. w., bis das letztere um 12 Z vorgerückt war. Von der dem Mikrometer zugewandten Endfläche des Mikroskop-Cylinders an, legte ich darauf die Anschiebe-Cylinder fünfmal aneinander und beobachtete, mit dem Mikrometer, den Punkt wo der zuletzt aufgelegte sich befand. Der Unterschied dieser Mikrometerangabe von der anfänglichen, ergab die Vergleichung von 12 Z mit den Anschiebe-Cylindern. Auf diese Art habe ich gefunden:

Digitized by Google

$$12\,Z = 2A + 3B + 0{,}^{\!L}067$$
$$= 3A + 2B + 0{,}118$$
$$= 2A + 3B + 0{,}108$$
$$= 3A + 2B + 0{,}163$$

Mittel .... $12\,Z = \frac{5}{2}\{A+B\} + 0{,}^{\!L}114$

Darauf machte ich dieselbe Messung auf der anderen Seite des Lagers der Toise und erhielt:

$$12\,Z = 3A + 2B + 0{,}^{\!L}202$$
$$= 2A + 3B + 0{,}200$$
$$= 3A + 2B + 0{,}047$$
$$= 2A + 3B + 0{,}020$$

Mittel .... $12\,Z = \frac{5}{2}\{A+B\} + 0{,}^{\!L}117$

Das Mittel aus beiden ist

$12\,Z = \frac{5}{2}\{A+B\} + 0{,}^{\!L}0143$ .... Wärme $= 19{,}^{\circ}5$ C.

der Werth von $\frac{5}{2}(A+B)$ ist aber, wie man im folgenden §. sehen wird, in der Wärme von $16{,}^{\circ}25 = 38{,}^{\!L}811133$, also in der Wärme der gegenwärtigen Messung (§. 11.) $= 28{,}^{\!L}81208$. Hieraus folgt $12\,Z = 144{,}^{\!L}0747$ und nach der Reduction auf $16{,}^{\circ}25$ des Thermometers $= 144{,}^{\!L}0659$. Man hat also die Länge des Zolls $= 12{,}^{\!L}0055$.

§. 14.

Bestimmung der Länge der Anschiebe-Cylinder.

Die im 5ten §. enthaltene Bestimmung dieser Art konnte gegenwärtig nicht wieder angewandt werden, indem Hr. *Baumann*, vor der Absendung des Apparats nach Königsberg, die kugelförmigen Endflächen der Cylinder neu polirt, diese also verkürzt hatte. Die neue Bestimmung habe ich so angeordnet, dafs ich an jedem Tage, an welchem ich die Länge des Preufsischen Original-Maafses, immer 6 Mal wiederholt, gemessen hatte, zwei, den im 5ten §. mitgetheilten durchaus ähnliche, Messungen von $15(A+B)$ machte. In dem folgenden Verzeichnisse dieser Beobachtungen bemerkt man aber den Unterschied von dem früheren, dafs die Angabe jedes der Mikrometer in Pariser Linien verwandelt worden ist; hätte ich die frühere

Digitized by Google

Form wieder beobachten wollen, so würde ich zwei neue, die Verbesserungen der Angaben der Mikrometer durch die im vorigen §. gegebenen Formeln enthaltende Columnen, haben hinzusetzen müssen; ich habe daher die Anwendung der Tafel der Beilage II vorgezogen.

1837		Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	15(A+B) − Toise	Wärme
		C°	R	L	R	L	L	L	°
Juli 25	Toise *u*	18,75	19,4519	— 0,0671	16,9669	— 0,3714	— 0,4385		
	15(A+B)	18,70	17,9883	— 0,2460	15,7110	— 0,5252	— 0,7712	+ 0,3332	18,71
	15(A+B)	18,70	17,2507	— 0,3365	16,4478	— 0,4350	— 0,7715		
	Toise *o*	18,68	18,2738	— 0,2113	18,1508	— 0,2265	— 0,4378		
—	Toise *o*	18,63	18,2738	— 0,2113	18,1503	— 0,2265	— 0,4378		
	15(A+B)	18,60	16,5812	— 0,4183	17,1036	— 0,3547	— 0,7730	+ 0,3347	18,62
	15(A+B)	18,60	16,8739	— 0,3823	16,8183	— 0,3896	— 0,7719		
	Toise *u*	18,65	18,9751	— 0,1253	17,4493	— 0,3124	— 0,4377		
26	Toise *o*	15,07	17,9362	— 0,2524	18,6992	— 0,1592	— 0,4116		
	15(A+B)	15,09	16,8536	— 0,3848	17,0370	— 0,3628	— 0,7476	+ 0,3358.5	15,10
	15(A+B)	15,12	16,8098	— 0,3902	17,0836	— 0,3571	— 0,7473		
	Toise *u*	15,12	18,4763	— 0,1864	18,1613	— 0,2252	— 0,4116		
—	Toise *u*	15,14	18,4763	— 0,1864	18,1616	— 0,2252	— 0,4116		
	15(A+B)	15,16	16,9897	— 0,3682	16,8921	— 0,3805	— 0,7487	+ 0,3368.5	15,18
	15(A+B)	15,20	16,8351	— 0,3871	17,0486	— 0,3614	— 0,7485		
	Toise *o*	15,20	18,2256	— 0,2172	18,4100	— 0,1947	— 0,4119		
Aug. 1	Toise *o*	17,75	18,1535	— 0,2260	18,3397	— 0,2034	— 0,4294		
	15(A+B)	17,75	16,7802	— 0,3939	16,9927	— 0,3682	— 0,7621	+ 0,3333.5	17,75
	15(A+B)	17,73	16,7802	— 0,3939	16,9795	— 0,3698	— 0,7637		
	Toise *u*	17,75	17,6538	— 0,2870	18,8345	— 0,1427	— 0,4297		
—	Toise *u*	17,75	17,6539	— 0,2870	18,8350	— 0,1426	— 0,4296		
	15(A+B)	17,70	16,5635	— 0,4205	17,2073	— 0,3421	— 0,7626	+ 0,3332.5	17,73
	15(A+B)	17,73	16,7542	— 0,3971	17,0150	— 0,3655	— 0,7626		
	Toise *o*	17,75	17,3792	— 0,3207	19,1150	— 0,1084	— 0,4291		
4	Toise *o*	20,12	18,3430	— 0,2028	18,0895	— 0,2339	— 0,4367		
	15(A+B)	20,12	17,0128	— 0,3654	16,7199	— 0,4016	— 0,7670	+ 0,3302	20,14
	15(A+B)	20,15	16,5582	— 0,4211	17,1740	— 0,3461	— 0,7672		
	Toise *u*	20,17	18,3017	— 0,2079	18,1285	— 0,2292	— 0,4371		
—	Toise *u*	20,17	18,3011	— 0,2080	18,1283	— 0,2292	— 0,4372		
	15(A+B)	20,17	16,8833	— 0,3812	16,8383	— 0,3871	— 0,7683	+ 0,3312	20,20
	15(A+B)	20,22	16,8007	— 0,3913	16,9260	— 0,3764	— 0,7677		
	Toise *o*	20,25	18,3017	— 0,2078	18,1336	— 0,2286	— 0,4364		

Digitized by Google

1837		Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	15(A+B) − Toise	Wärme
		C°	R	L	R	L	L	L	°
Aug. 13	Toise *o*	22,19	18,9161	−0,1325	17,4117	−0,3170	−0,4495		
	15(*A*+*B*)	22,24	15,9905	−0,4905	17,6363	−0,2894	−0,7799	+ 0,3291	22,25
		22,27	17,0542	−0,3604	16,5807	−0,4186	−0,7790		
	Toise *u*	22,29	17,8574	−0,2583	18,4245	−0,1929	−0,4512		
—	Toise *u*	22,27	17,8875	−0,2583	18,4245	−0,1929	−0,4512		
	15(*A*+*B*)	22,25	17,1256	−0,3517	16,4943	−0,4293	−0,7810	+ 0,3288.5	22,25
		22,25	16,2054	−0,4644	17,4273	−0,3151	−0,7795		
	Toise *o*	22,25	18,3560	−0,2012	17,9550	−0,2504	−0,4516		
20	Toise *o*	15,42	19,6246	−0,0459	17,0555	−0,3606	−0,4065		
	15(*A*+*B*)	15,49	16,9592	−0,3719	16,9725	−0,3707	−0,7426	+ 0,3351	15,58
		15,67	16,8880	−0,3806	17,0396	−0,3625	−0,7431		
	Toise *u*	15,74	18,3860	−0,1975	18,2737	−0,2115	−0,4090		
—	Toise *u*	15,75	18,3860	−0,1975	18,2746	−0,2114	−0,4089		
	15(*A*+*B*)	15,75	16,8842	−0,3811	17,0335	−0,3632	−0,7443	+ 0,3359.5	15,84
		15,85	17,1151	−0,3530	16,7860	−0,3935	−0,7465		
	Toise *o*	15,99	19,0287	−0,1187	17,6208	−0,2913	−0,4100		
25	Toise *o*	13,16	18,5172	−0,1814	18,5155	−0,1817	−0,3631		
	15(*A*+*B*)	13,16	16,8150	−0,3896	17,4721	−0,3095	−0,6991	+ 0,3364	13,17
		13,16	16,9903	−0,3682	17,2980	−0,3310	−0,6992		
	Toise *u*	13,18	18,6991	−0,1591	18,3404	−0,2033	−0,3624		
—	Toise *u*	13,11	18,6994	−0,1591	18,3407	−0,2033	−0,3624		
	15(*A*+*B*)	13,06	16,9103	−0,3779	17,3773	−0,3212	−0,6991	+ 0,3372	13,08
		13,08	16,0732	−0,4805	18,2095	−0,2193	−0,6998		
	Toise *o*	13,08	19,1007	−0,1100	17,9407	−0,2521	−0,3621		
26	Toise *u*	13,16	18,6119	−0,1698	18,4200	−0,1935	−0,3633		
	15(*A*+*B*)	13,27	17,1018	−0,3546	17,1743	−0,3461	−0,7007	+ 0,3365	13,29
		13,32	17,1477	−0,3490	17,1409	−0,3501	−0,6991		
	Toise *o*	13,41	18,0336	−0,2405	18,9947	−0,1230	−0,3635		
—	Toise *o*	13,41	18,0334	−0,2405	18,9957	−0,1229	−0,3634		
	15(*A*+*B*)	13,38	17,0274	−0,3636	17,2565	−0,3361	−0,6997	+ 0,3368.5	13,43
		13,46	16,9800	−0,3694	17,2977	−0,3310	−0,7004		
	Toise *u*	13,46	18,6185	−0,1653	18,3861	−0,1977	−0,3630		

Um diese Messungen auf die Normaltemperatur $= 16^{\circ}{,}25$ zu reduciren, mufs man $0^{L}{,}0009805\ (t - 16^{\circ}{,}25)$ hinzufügen; dadurch ergeben sie:

30. $\frac{1}{2}\{A+B\}$ = Toise P	$+ 0^{L}{,}3356$	Unterschied $+ 0^{L}{,}0008.1$
	$+ 0{,}3370$	………………… $+ 0{,}0022.1$
	$+ 0{,}3347$	………………… $- 0{,}0000.9$

L

Digitized by Google

$30.\frac{1}{2}\{A+B\}$ = Toise P	+ 0,3358	Unterschied + 0,0010.1
	+ 0,3348	+ 0,0000.1
	+ 0,3347	− 0,0000.9
	+ 0,3341	− 0,0006.9
	+ 0,3351	+ 0,0003.1
	+ 0,3350	+ 0,0002.1
	+ 0,3348	+ 0,0000.1
	+ 0,3344	− 0,0003.9
	+ 0,3355	+ 0,0007.1
	+ 0,3333	− 0,0014.9
	+ 0,3341	− 0,0006.9
	+ 0,3336	− 0,0011.9
	+ 0,3341	− 0,0006.9
Mittel....... $30.\frac{1}{2}\{A+B\}$ = Toise P	+ 0,33479	

Der mittlere Fehler jeder dieser Messungen ist $= \pm 0^L{,}00091$, des Mittels also $= \pm 0^L{,}00023$. Man erhält daraus

$$30.\tfrac{1}{2}(A+B) = 864^L{,}33399$$

und .... $\frac{1}{2}(A+B) = 28{,}811133$

§. 15.

Zweite Reihe der Messungen, im Jahre 1837.

Das Verfahren bei den Beobachtungen war genau dasselbe, welches ich im 12ten §. angegeben habe. Ich kann also die Versuche, ohne weitere Erklärung, folgen lassen.

1837		Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	$2O+\frac{1}{2}(A+B)$ − Toise	Wärme
		C °	R	L	R	L	L		
Juli 25	Toise *u*	18,89	18,0964	− 0,2329	18,2909	− 0,2094	− 0,4423		
	2O′+A	18,90	19,7540	− 0,0300	20,0148	+ 0,0019	− 0,0281	L − 0,4097	° 18,90
	2O′+B	18,87	19,7488	− 0,0306	19,9538	− 0,0056	− 0,0362		
	Toise *o*	18,93	18,2940	− 0,2088	18,1004	− 0,2326	− 0,4414		
—	Toise *o*	18,92	18,2950	− 0,2087	18,1036	− 0,2322	− 0,4409		
	2O′+A	18,85	19,7680	− 0,0283	19,9989	− 0,0001	− 0,0284	− 0,4091	18,88
	2O′+B	18,87	18,7984	− 0,1469	20,9133	+ 0,1118	− 0,0351		
	Toise *u*	18,87	18,2382	− 0,2157	18,1622	− 0,2251	− 0,4408		

Digitized by Google

1837		Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	$2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ − Toise	Wärme
		C 0	R	L	R	L	L	L	0
Juli 25	Toise *u*	18,85	18,2383	— 0,2157	18,1647	— 0,2248	— 0,4405		
	2O'+A	18,83	20,4265	+ 0,0521	19,3592	— 0,0786	— 0,0265	— 0,4101	18,83
	2O'+B	18,80	20,4219	+ 0,0516	19,3088	— 0,0847	— 0,0331		
	Toise *o*	18,85	19,0563	— 0,1154	17,3558	— 0,3239	— 0,4393		
—	Toise *o*	18,85	19,0540	— 0,1157	17,3570	— 0,3237	— 0,4394		
	2O'+A	18,79	19,9922	— 0,0009	19,7903	— 0,0256	— 0,0265	— 0,4096.5	18,795
	2O'+B	18,79	20,0127	+ 0,0016	19,7147	— 0,0349	— 0,0333		
	Toise *u*	18,75	18,6065	— 0,1705	17,8009	— 0,2692	— 0,4397		
—	Toise *u*	18,80	18,6071	— 0,1704	17,8017	— 0,2691	— 0,4395		
	2O'+A	18,77	20,1764	+ 0,0215	19,6120	— 0,0474	— 0,0259	— 0,4103	18,77
	2O'+B	18,75	20,1727	+ 0,0210	19,5609	— 0,0537	— 0,0327		
	Toise *o*	18,75	18,5466	— 0,1778	17,8609	— 0,2619	— 0,4397		
—	Toise *o*	18,75	18,5465	— 0,1778	17,8720	— 0,2605	— 0,4383		
	2O'+A	18,75	19,7616	— 0,0291	20,0351	+ 0,0043	— 0,0248	— 0,4099	18,75
	2O'+B	18,75	19,7683	— 0,0282	19,9663	— 0,0041	— 0,0323		
	Toise *u*	18,75	19,4520	— 0,0671	16,9659	— 0,3715	— 0,4386		
26	Toise *o*	15,32	17,4112	— 0,3168	19,1913	— 0,0991	— 0,4159		
	2O'+A	15,32	17,8949	— 0,2574	22,0678	+ 0,2531	— 0,0043	— 0,4069.5	15,30
	2O'+B	15,29	17,9025	— 0,2565	21,9979	+ 0,2446	— 0,0119		
	Toise *u*	15,27	19,3578	— 0,0787	17,2608	— 0,3355	— 0,4142		
—	Toise *u*	15,24	17,9484	— 0,2509	18,6666	— 0,1632	— 0,4141		
	2O'+A	15,12	19,9895	— 0,0012	19,9893	— 0,0013	— 0,0025	— 0,4072.5	15,15
	2O'+B	15,12	19,9775	— 0,0027	19,9393	— 0,0074	— 0,0101		
	Toise *o*	15,12	18,7075	— 0,1580	17,9170	— 0,2550	— 0,4130		
—	Toise *o*	15,10	18,7069	— 0,1581	17,9176	— 0,2549	— 0,4130		
	2O'+A	15,10	20,0122	+ 0,0016	19,9647	— 0,0043	— 0,0027	— 0,4060	15,11
	2O'+B	15,12	20,0117	+ 0,0015	19,9068	— 0,0114	— 0,0099		
	Toise *u*	15,12	18,1477	— 0,2267	18,4896	— 0,1849	— 0,4116		
—	Toise *u*	15,08	18,1479	— 0,2266	18,4901	— 0,1849	— 0,4115		
	2O'+A	15,09	20,1038	+ 0,0127	19,8790	— 0,0148	— 0,0021	— 0,4066	15,07
	2O'+B	15,06	20,1150	+ 0,0140	19,8120	— 0,0230	— 0,0090		
	Toise *o*	15,06	17,6801	— 0,2838	18,9457	— 0,1290	— 0,4128		
—	Toise *o*	15,03	17,6807	— 0,2837	18,9483	— 0,1287	— 0,4124		
	2O'+A	15,06	19,8701	— 0,0158	20,1076	+ 0,0132	— 0,0026	— 0,4062.5	15,04
	2O'+B	15,04	19,9014	— 0,0119	20,0230	+ 0,0028	— 0,0091		
	Toise *u*	15,03	18,0760	— 0,2354	18,5585	— 0,1764	— 0,4118		

Digitized by Google

1837		Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	$2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ − Toise	Wärme
		°	R	L	R	L	L	L	°
Juli 26	Toise u	15,03	18,6679	— 0,2364	18,5707	— 0,1749	— 0,4113	— 0,4067	15,065
	2O'+A	15,07	19,8138	— 0,0227	20,1700	+ 0,0208	— 0,0019		
	2O'+B	15,07	19,8218	— 0,0217	20,1117	+ 0,0137	— 0,0080		
	Toise o	15,09	17,9350	— 0,2525	18,6972	— 0,1595	— 0,4120		
Aug. 1	Toise o	18,05	19,0592	— 0,1151	17,4170	— 0,3163	— 0,4314	— 0,4098.5	18,065
	2O'+A	18,08	19,0086	— 0,1212	20,8383	+ 0,1027	— 0,0185		
	2O'+B	18,08	19,0621	— 0,1147	20,7311	+ 0,0895	— 0,0252		
	Toise u	18,05	18,2936	— 0,2089	18,1788	— 0,2231	— 0,4320		
—	Toise u	18,05	18,2938	— 0,2088	18,1800	— 0,2229	— 0,4317	— 0,4094	18,07
	2O'+A	18,08	19,4939	— 0,0619	20,3490	+ 0,0426	— 0,0193		
	2O'+B	18,08	19,5018	— 0,0610	20,2963	+ 0,0362	— 0,0248		
	Toise o	18,08	18,4089	— 0,1947	18,0681	— 0,2365	— 0,4312		
—	Toise o	18,08	18,4088	— 0,1947	18,0679	— 0,2366	— 0,4313	— 0,4100	18,095
	2O'+A	18,10	19,5439	— 0,0558	20,3111	+ 0,0380	— 0,0178		
	2O'+B	18,10	19,5524	— 0,0548	20,2416	+ 0,0295	— 0,0253		
	Toise u	18,10	18,1439	— 0,2271	18,3293	— 0,2047	— 0,4318		
—	Toise u	18,08	18,1447	— 0,2270	18,3353	— 0,2039	— 0,4309	— 0,4089	18,065
	2O'+A	18,08	19,4036	— 0,0730	20,4433	+ 0,0543	— 0,0187		
	2O'+B	18,05	19,4723	— 0,0646	20,3281	+ 0,0401	— 0,0245		
	Toise o	18,05	18,6889	— 0,1604	17,7971	— 0,2697	— 0,4301		
—	Toise o	18,03	18,6888	— 0,1604	17,7976	— 0,2696	— 0,4300	— 0,4094	17,95
	2O'+A	17,95	19,2878	— 0,0872	20,5731	+ 0,0702	— 0,0170		
	2O'+B	17,93	19,2881	— 0,0872	20,5111	+ 0,0626	— 0,0246		
	Toise u	17,90	18,0703	— 0,2361	18,4137	— 0,1943	— 0,4304		
—	Toise u	17,85	18,0706	— 0,2360	18,4146	— 0,1941	— 0,4301	— 0,4091.5	17,815
	2O'+A	17,83	19,7544	— 0,0300	20,1049	+ 0,0128	— 0,0172		
	2O'+B	17,80	19,7715	— 0,0279	20,0377	+ 0,0046	— 0,0233		
	Toise o	17,78	18,1542	— 0,2259	18,3395	— 0,2034	— 0,4293		
4	Toise u	20,25	19,2146	— 0,0962	17,2046	— 0,3424	— 0,4386	— 0,4114	20,27
	2O'+A	20,30	19,9860	— 0,0016	19,8244	— 0,0215	— 0,0231		
	2O'+B	20,27	19,9910	— 0,0010	19,7726	— 0,0278	— 0,0288		
	Toise o	20,25	19,6711	— 0,0402	16,7665	— 0,3959	— 0,4361		
—	Toise o	20,25	19,6710	— 0,0402	16,7671	— 0,3959	— 0,4361	— 0,4118.5	20,23
	2O'+A	20,22	19,5767	— 0,0518	20,2453	+ 0,0299	— 0,0219		
	2O'+B	20,25	19,5861	— 0,0506	20,1778	+ 0,0217	— 0,0289		
	Toise u	20,20	19,2036	— 0,0975	17,2167	— 0,3409	— 0,4384		

Digitized by Google

1837		Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	$2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ — Toise	Wärme
		C °	R	L	R	L	L	L	°
Aug. 4	Toise *u*	20,20	18,1617	— 0,2250	18,2673	— 0,2123	— 0,4373		
	2O′+A	20,22	20,0617	+ 0,0076	19,7581	— 0,0296	— 0,0220	— 0,4114	20,215
	2O′+B	20,22	20,0561	+ 0,0069	19,7072	— 0,0358	— 0,0289		
	Toise *o*	20,22	18,0196	— 0,2422	18,4127	— 0,1944	— 0,4366		
—	Toise *o*	20,20	18,0192	— 0,2423	18,4133	— 0,1943	— 0,4366		
	2O′+A	20,17	19,6986	— 0,0368	20,1245	+ 0,0152	— 0,0216	— 0,4115.5	20,17
	2O′+B	20,17	19,7081	— 0,0357	20,0589	+ 0,0072	— 0,0285		
	Toise *u*	20,15	18,0536	— 0,2381	18,3789	— 0,1985	— 0,4366		
—	Toise *u*	20,10	18,4580	— 0,1887	17,9811	— 0,2472	— 0,4359		
	2O′+B	20,10	19,9271	— 0,0088	19,8440	— 0,0191	— 0,0279	— 0,4120	20,075
	2O′+A	20,10	19,9180	— 0,0099	19,9075	— 0,0113	— 0,0212		
	Toise *o*	20,00	18,3418	— 0,2030	18,0877	— 0,2342	— 0,4372		
—	Toise *o*	20,12	18,3380	— 0,2034	18,1035	— 0,2322	— 0,4356		
	2O′+A	20,05	19,6271	— 0,0456	20,1954	+ 0,0238	— 0,0218	— 0,4104	20,09
	2O′+B	20,10	19,6328	— 0,0449	20,1313	+ 0,0160	— 0,0289		
	Toise *u*	20,10	18,4583	— 0,1887	17,9809	— 0,2472	— 0,4359		
13	Toise *o*	21,87	18,5374	— 0,1789	17,7881	— 0,2708	— 0,4497		
	2O′+A	21,89	19,9126	— 0,0106	19,8241	— 0,0215	— 0,0321	— 0,4131.5	21,89
	2O′+B	21,89	19,9005	— 0,0120	19,7671	— 0,0285	— 0,0405		
	Toise *u*	21,92	19,3856	— 0,0752	16,9452	— 0,3740	— 0,4492		
—	Toise *u*	21,97	19,3855	— 0,0753	16,9450	— 0,3741	— 0,4494		
	2O′+A	21,99	19,7671	— 0,0284	19,9671	— 0,0040	— 0,0324	— 0,4139	21,99
	2O′+B	22,02	19,7790	— 0,0269	19,9006	— 0,0121	— 0,0390		
	Toise *o*	21,99	18,9071	— 0,1336	17,4179	— 0,3162	— 0,4498		
—	Toise *o*	21,99	18,9070	— 0,1336	17,4177	— 0,3162	— 0,4498		
	2O′+A	21,99	19,8153	— 0,0225	19,9161	— 0,0102	— 0,0327	— 0,4136.5	22,03
	2O′+B	22,04	19,8171	— 0,0223	19,8472	— 0,0187	— 0,0410		
	Toise *u*	22,09	19,7065	— 0,0358	16,6073	— 0,4154	— 0,4512		
—	Toise *u*	22,12	19,7065	— 0,0358	16,6071	— 0,4154	— 0,4512		
	2O′+A	22,12	19,4104	— 0,0722	20,3116	+ 0,0380	— 0,0342	— 0,4138	22,13
	2O′+B	22,14	19,4210	— 0,0709	20,2483	+ 0,0303	— 0,0406		
	Toise *o*	22,14	18,7034	— 0,1586	17,6101	— 0,2926	— 0,4512		
—	Toise *o*	22,14	18,7054	— 0,1583	17,6100	— 0,2926	— 0,4509		
	2O′+A	22,14	19,4954	— 0,0618	20,2291	+ 0,0279	— 0,0339	— 0,4129.5	22,155
	2O′+B	22,17	19,5011	— 0,0611	20,1617	+ 0,0198	— 0,0413		
	Toise *u*	22,17	18,7912	— 0,1478	17,5301	— 0,3024	— 0,4502		

Digitized by Google

1837		Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	2σ+½(A+B) − Toise	Wärme
		C °	R	L	R	L	L	L	°
Aug. 13	Toise *u*	22,19	18,7911	−0,1478	17,5317	−0,3022	−0,4500	−0,4124	22,20
	2σ′+A	22,22	19,6593	−0,0417	20,0593	+0,0073	−0,0344		
	2σ′+B	22,19	19,6705	−0,0403	20,0000	0,0000	−0,0403		
	Toise *o*	22,19	18,9160	−0,1325	17,4115	−0,3170	−0,4495		
20	Toise *o*	14,45	18,7548	−0,1523	17,9631	−0,2494	−0,4017	−0,4051	14,55
	2σ′+A	14,57	19,2337	−0,0939	20,8172	+0,1001	+0,0062		
	2σ′+B	14,57	19,2522	−0,0916	20,7482	+0,0916	0,0000		
	Toise *u*	14,60	18,9550	−0,1277	17,7570	−0,2746	−0,4023		
—	Toise *u*	14,62	18,9550	−0,1277	17,7566	−0,2747	−0,4024	−0,4059	14,69
	2σ′+A	14,65	19,8400	−0,0195	20,2150	+0,0262	+0,0067		
	2σ′+B	14,72	19,8422	−0,0192	20,1621	+0,0198	+0,0006		
	Toise *o*	14,77	18,6750	−0,1621	18,0396	−0,2400	−0,4021		
—	Toise *o*	14,77	18,6728	−0,1623	18,0380	−0,2402	−0,4025	−0,4057	14,815
	2σ′+A	14,80	19,8325	−0,0204	20,2164	+0,0264	+0,0060		
	2σ′+B	14,82	19,8382	−0,0197	20,1581	+0,0193	−0,0004		
	Toise *u*	14,87	19,0650	−0,1144	17,6404	−0,2889	−0,4033		
—	Toise *u*	14,90	19,0644	−0,1145	17,6393	−0,2890	−0,4035	−0,4058.5	14,96
	2σ′+A	14,95	20,2294	+0,0279	19,8185	−0,0222	+0,0057		
	2σ′+B	14,97	20,2193	+0,0267	19,7725	−0,0278	−0,0011		
	Toise *o*	15,02	19,1625	−0,1025	17,5411	−0,3011	−0,4036		
—	Toise *o*	15,02	19,1626	−0,1025	17,5408	−0,3011	−0,4036	−0,4055	15,15
	2σ′+A	15,10	20,0524	+0,0064	19,9907	−0,0011	+0,0053		
	2σ′+B	15,22	20,3225	+0,0393	19,6499	−0,0428	−0,0035		
	Toise *u*	15,25	19,7925	−0,0253	16,8939	−0,3803	−0,4056		
—	Toise *o*	15,27	19,7925	−0,0253	16,8947	−0,3802	−0,4055	−0,4060	15,34
	2σ′+A	15,32	20,2724	+0,0332	19,7605	−0,0293	+0,0039		
	2σ′+B	15,35	20,2632	+0,0321	19,7058	−0,0360	−0,0039		
	Toise *u*	15,42	19,6246	−0,0459	17,0555	−0,3606	−0,4065		
25	Toise *u*	13,56	18,6498	−0,1651	18,3663	−0,2001	−0,3652	−0,4042.5	13,55
	2σ′+A	13,56	20,5262	+0,0643	19,8189	−0,0221	+0,0422		
	2σ′+B	13,53	20,5432	+0,0664	19,7452	−0,0312	+0,0352		
	Toise *o*	13,56	18,8384	−0,1420	18,1717	−0,2239	−0,3659		
—	Toise *o*	13,53	18,8385	−0,1420	18,1723	−0,2239	−0,3659	−0,4057.5	13,515
	2σ′+A	13,51	19,8667	−0,0162	20,4889	+0,0599	+0,0437		
	2σ′+B	13,51	19,8768	−0,0149	20,4185	+0,0512	+0,0363		
	Toise *u*	13,51	18,9864	−0,1239	18,0260	−0,2417	−0,3656		

Digitized by Google

1837		Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	$2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ − Toise	Wärme
		C °	R	L	R	L	L	L	°
Aug. 25	Toise *u*	13,46	18,9868	− 0,1238	18,0265	− 0,2416	− 0,3654	− 0,4053.5	13,435
	$2O'+A$	13,46	20,1440	+ 0,0176	20,2072	+ 0,0253	+ 0,0429		
	$2O'+B$	13,41	20,1648	+ 0,0201	20,1373	+ 0,0168	+ 0,0369		
	Toise *o*	13,41	19,2591	− 0,0908	17,7565	− 0,2747	− 0,3655		
—	Toise *o*	13,41	19,2590	− 0,0908	17,7569	− 0,2746	− 0,3654	− 0,4054	13,35
	$2O'+A$	13,36	20,0241	+ 0,0030	20,3375	+ 0,0412	+ 0,0442		
	$2O'+B$	13,31	20,0479	+ 0,0059	20,2520	+ 0,0307	+ 0,0366		
	Toise *u*	13,31	18,8856	− 0,1362	18,1350	− 0,2284	− 0,3646		
—	Toise *u*	13,30	18,8857	− 0,1362	18,1355	− 0,2283	− 0,3645	− 0,4045.5	13,23
	$2O'+A$	13,26	19,5437	− 0,0558	20,8191	+ 0,1003	+ 0,0445		
	$2O'+B$	13,18	18,5502	− 0,0550	20,7552	+ 0,0925	+ 0,0375		
	Toise *o*	13,18	18,2917	− 0,2091	18,7463	− 0,1535	− 0,3626		
—	Toise *o*	13,18	18,2899	− 0,2093	18,7465	− 0,1534	− 0,3627	− 0,4042	13,175
	$2O'+A$	13,16	19,8863	− 0,0138	20,4735	+ 0,0580	+ 0,0442		
	$2O'+B$	13,18	19,9016	− 0,0119	20,4111	+ 0,0503	+ 0,0384		
	Toise *u*	13,18	18,5179	− 0,1813	18,5150	− 0,1818	− 0,3631		
26	Toise *u*	12,74	18,5795	− 0,1738	18,4888	− 0,1850	− 0,3588	− 0,4041.5	12,79
	$2O'+A$	12,79	19,6770	− 0,0395	20,7217	+ 0,0884	+ 0,0489		
	$2O'+B$	12,81	19,6783	− 0,0393	20,6639	+ 0,0813	+ 0,0420		
	Toise *o*	12,81	18,4731	− 0,1868	18,5965	− 0,1718	− 0,3586		
—	Toise *o*	12,81	18,4722	− 0,1869	18,5960	− 0,1718	− 0,3587	− 0,4041.5	12,855
	$2O'+A$	12,89	19,9298	− 0,0085	20,4661	+ 0,0571	+ 0,0486		
	$2O'+B$	12,86	19,9341	− 0,0079	20,3951	+ 0,0483	+ 0,0404		
	Toise *u*	12,86	18,9712	− 0,1258	18,0828	− 0,2348	− 0,3606		
—	Toise *u*	12,89	18,9717	− 0,1257	18,0819	− 0,2349	− 0,3606	− 0,4049	12,93
	$2O'+A$	12,94	20,2699	+ 0,0329	20,1253	+ 0,0153	+ 0,0482		
	$2O'+B$	12,94	20,2578	+ 0,0314	20,0716	+ 0,0088	+ 0,0402		
	Toise *o*	12,96	18,5217	− 0,1809	18,5307	− 0,1799	− 0,3608		
—	Toise *o*	12,96	18,5203	− 0,1810	18,5297	− 0,1800	− 0,3610	− 0,4043.5	13,025
	$2O'+A$	13,01	19,9268	− 0,0088	20,4504	+ 0,0551	+ 0,0463		
	$2O'+B$	13,04	19,9373	− 0,0076	20,3804	+ 0,0465	+ 0,0389		
	Toise *u*	13,09	18,5307	− 0,1798	18,5077	− 0,1827	− 0,3625		
—	Toise *u*	13,09	18,5303	− 0,1798	18,5077	− 0,1827	− 0,3625	− 0,4043.5	13,11
	$2O'+A$	13,09	20,1324	+ 0,0161	20,2400	+ 0,0293	+ 0,0454		
	$2O'+B$	13,11	20,1254	+ 0,0153	20,1946	+ 0,0237	+ 0,0390		
	Toise *o*	13,14	18,4656	− 0,1878	18,5787	− 0,1740	− 0,3618		

Digitized by Google

1837		Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	$2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ − Toise	Wärme
		C °	R	L	R	L	L	L	°
Aug. 26	Toise o	13,11	18,4652	— 0,1878	18,5785	— 0,1740	— 0,3618	— 0,4045.5	13,15
	2O'+A	13,14	19,9498	— 0,0060	20,4212	+ 0,0515	+ 0,0455		
	2O'+B	13,16	19,9592	— 0,0049	20,3550	+ 0,0434	+ 0,0385		
	Toise u	13,19	18,6116	— 0,1698	18,4199	— 0,1935	— 0,3633		

Die mittlere Wärme, in welcher diese Beobachtungen gemacht worden sind, ist = 16°,933 C, also nur 0°,683 über der Normalwärme beider Maafse; aber zwischen den einzelnen Beobachtungstagen kommen Wärmeunterschiede vor, welche bis auf 9° steigen. Man kann daher die zur Reduction der gemessenen Quantität auf die Normalwärme erforderliche Kenntnifs ihrer Veränderungen, aus diesen Beobachtungen selbst ableiten. Stellt man die arithmetischen Mittel aus den 6 Messungen jedes Tages, nach der Wärme geordnet, zusammen, so erhält man die beobachteten Werthe von $2O'+\frac{1}{2}\{A+B\}$ — Toise:

	Wärme		
	°	L	
Aug. 26	12,977	— 0,40441	6 Beobb.
25	13,376	— 0,40492	6 —
20	14,918	— 0,40568	6 —
Juli 26	15,123	— 0,40663	6 —
Aug. 1	18,010	— 0,40950	6 —
Juli 25	18,821	— 0,40979	6 —
Aug. 4	20,175	— 0,41143	6 —
13	22,066	— 0,41331	6 —

Die hieraus folgende Formel für $2O'+\frac{1}{2}(A+B)$ — Toise ist

$$-0^L{,}407539 - 0^L{,}0009805\,(t - 16^\circ{,}25)$$

und ihr erstes Glied hat das Gewicht von 45,785, das zweite das Gewicht von 463,326 Beobachtungen.

Wendet man die jetzt gefundene Gröfse des Einflusses der Wärme an, um aus den einzelnen der 48 Messungen O', oder die Länge des Preufsischen Originalmaafses für seine Normalwärme abzuleiten, so erhält man sie aus einer Messung, welche, in der Wärme t, $2O'+\frac{1}{2}\{A+B\}$ — Toise $= -d$ ergeben hat:

Toise P	$863^L,9992$
$-\frac{1}{2}\{A+B\}$ (§. 14.)	$-\ 28,811133$
Doppelte Verbesserung (§. 8.)	$-\ \ \ 0,001748$
	$835,18632$

also

$$O' = 417^L,59316 - \tfrac{1}{2}\,d + (t - 16^\circ,25)\ 0^L,00049025.$$

Die einzelnen Messungen ergeben, dieser Formel zufolge:

1837	O'	Untersch.	1837	O'	Untersch.
	L	L		L	L
Juli 25	417,3896 . 1	+ 0,0002 . 2	Aug. 13	417,3893 . 5	— 0,0000 . 4
	3899 . 0	+ 0,0005 . 1		3890 . 2	— 0,0003 . 7
	3893 . 7	— 0,0000 . 2		3891 . 7	— 0,0002 . 2
	3895 . 8	+ 0,0001 . 9		3891 . 4	— 0,0002 . 5
	3892 . 4	— 0,0001 . 5		3895 . 8	+ 0,0001 . 9
	3894 . 4	+ 0,0000 . 5		3898 . 8	+ 0,0004 . 9
— 26	3892 . 2	— 0,0001 . 7	— 20	3897 . 8	+ 0,0003 . 9
	3890 . 0	— 0,0003 . 9		3894 . 4	+ 0,0000 . 5
	3896 . 0	+ 0,0002 . 1		3896 . 0	+ 0,0002 . 1
	3892 . 9	— 0,0001 . 0		3896 . 0	+ 0,0002 . 1
	3894 . 4	+ 0,0000 . 5		3898 . 7	+ 0,0004 . 8
	3892 . 3	— 0,0001 . 6		3897 . 1	+ 0,0003 . 2
Aug. 1	3891 . 5	— 0,0002 . 4	— 25	3897 . 1	+ 0,0003 . 2
	3893 . 5	— 0,0000 . 4		3889 . 4	— 0,0004 . 5
	3890 . 6	— 0,0003 . 3		3891 . 0	— 0,0002 . 9
	3896 . 0	+ 0,0002 . 1		3890 . 4	— 0,0003 . 5
	3892 . 9	— 0,0001 . 0		3894 . 0	+ 0,0000 . 1
	3892 . 0	— 0,0001 . 9		3895 . 5	+ 0,0001 . 6
— 4	3894 . 3	+ 0,0000 . 4	— 26	3893 . 9	0,0000 . 0
	3891 . 9	— 0,0002 . 0		3894 . 2	+ 0,0000 . 3
	3894 . 0	+ 0,0000 . 1		3890 . 8	— 0,0003 . 1
	3893 . 1	— 0,0000 . 8		3894 . 0	+ 0,0000 . 1
	3890 . 4	— 0,0003 . 5		3894 . 4	+ 0,0000 . 5
	3897 . 9	+ 0,0004 . 0		3893 . 6	— 0,0000 . 3

Das Mittel aus diesen 48 Messungen ergiebt

$$O' = 417^L,38939.$$

Der mittlere Fehler jeder einzelnen ist $= \pm\, 0^L,0002.54$ und der m. F. der Bestimmung von $O' = \pm\, 0^L,0000.375$.

Die im Jahre 1835 gemachte, im 12ten §. mitgetheilte Messung von O' ergiebt diese Länge $0^L,00021$ kleiner als die gegenwärtige, und der Unterschied

M

Digitized by Google

beider liegt aufserhalb seinem mittleren Fehler, welcher $= \pm 0^{L},0001.16$ ist. Ich glaube aber nicht, dafs man auf so schwachen Grund folgern darf, das Etalon sei, durch die häufigen, beträchtlichen Erwärmungen, welchen es, bei den Versuchen über seine Ausdehnbarkeit ausgesetzt wurde, wirklich länger geworden. Vielmehr scheint mir nur daraus hervorzugehen, dafs man nicht fürchten darf, es werde sich, durch die weit geringeren und noch langsamer vor sich gehenden Änderungen der Wärme, welche es in dem Verlaufe der Jahrszeiten, ohne wieder in warmes Wasser gebracht zu werden, erfahren wird, noch änderen. Jedenfalls verdient das Resultat der zweiten Reihe der Messungen, welches übrigens, durch die Verbindung mit dem der ersten, nur um $-0^{L},00002$ geändert werden würde, den Vorzug, weshalb ich es, ohne diese kleine Änderung, beibehalten werde.

Da die Einwirkung der Wärme auf das Preufsische Originalmaafs aus dem 11ten §. bekannt ist, so erhält man, durch die in dem gegenwärtigen §. gemachte Ableitung der relativen Einwirkungen derselben Ursache auf dieses Maafs und die Toise, eine Bestimmung der der letzteren zukommenden. Man hat nämlich, dem 11ten §. zufolge, die Vergröfserung der doppelten Länge des Originalmaafses, für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers:

$$= 0^{L},008454; \quad \text{m. F.} = \pm 0^{L},00002274.$$

Da diese Länge sich zu der Länge der Toise verhält, wie 29 : 30, so ist die Veränderung einer der Toise gleichen Länge

$$= 0^{L},008745; \quad \text{m. F.} = \pm 0^{L},00002352;$$

die Toise verändert aber ihre Länge, der gegenwärtigen Bestimmung zufolge, stärker, um

$$0^{L},0009805; \quad \text{m. F.} = \pm 0^{L},00002360;$$

ihre absolute Längenveränderung ist also

$$= 0^{L},0097255; \quad \text{m. F.} = \pm 0^{L},00003332$$

und in Theilen der Einheit ausgedrückt:

$$= 0,00001126; \quad \text{m. F.} = \pm 0,0000000386.$$

Früher habe ich, bei Gelegenheit meiner Königsberger Pendelversuche, bemerkt, dafs die in verschiedener Wärme gemachten, sich durch die An-

Digitized by Google

nahme der Änderung der Länge der Toise für jeden Grad des Thermometers, = 0,00001167 am besten darstellen lassen. Der Unterschied beider Bestimmungen scheint die Unsicherheit der gegenwärtigen beträchtlich zu übersteigen; die frühere verdient aber, der dabei angewandten Methode nach, weit weniger Zutrauen, weshalb ich sie auch damals nur angeführt, nicht zur Reduction der Beobachtungen benutzt, sondern diese auf die Bordasche Angabe = 0,0000114, welche der gegenwärtigen sehr nahe ist, gegründet habe.

Der mittlere Fehler jeder einzelnen der Messungen der Länge des Preufsischen Originalmaafses ist in der zweiten Reihe derselben weit kleiner als in der ersten, nicht völlig halb so grofs; eben so ist der mittlere Fehler der Messungen der dreifsigfachen Länge von $\frac{1}{2}\{A+B\}$ beträchtlich verkleinert worden. Ich glaube, dieses nur der Prüfung der Schrauben der Mikrometer zuschreiben zu können, welche bei der zweiten Reihe, nicht aber bei der ersten, vorgenommen wurde, so dafs von den Fehlerursachen, deren Zusammenwirken bei der ersten stattfand, bei der letzten eine fehlt. Um die Sicherheit der Messungen noch von einer anderen Seite, als von der Seite des mittleren Fehlers aus, kennen zu lernen, habe ich das mittlere Resultat der 6 Beobachtungen jedes Tages, getrennt von den übrigen, aufgesucht:

		Unterschied vom Mittel
	L	L
Juli 25	417,3895 . 2	+ 0,0001 . 3
26	3893 . 0	— 0,0000 . 9
Aug. 1	3892 . 8	— 0,0001 . 1
4	3893 . 6	— 0,0000 . 3
13	3893 . 6	— 0,0000 . 3
20	3896 . 7	+ 0,0002 . 8
25	3892 . 9	— 0,0001 . 0
26	3893 . 5	— 0,0000 . 4

So wenig die äufserste Kleinheit dieser Abweichungen der eintägigen Bestimmungen von dem Mittel auffordert, noch Erklärungen für sie zu suchen, so lasse ich doch nicht unbemerkt, dafs die gröfsere Abweichung, am 20sten August, bei Beobachtungen vorkommt, während welcher die Wärme des Weingeistbades sich weit schneller änderte, als während der übrigen Beobachtungsreihen. Sie wuchs in der, vielleicht anderthalb bis zwei Stunden

Digitized by Google

langen, Zwischenzeit zwischen den äufsersten Messungen, um einen Grad, statt dessen, an allen übrigen Tagen weit langsamere Vermehrungen und Verminderungen derselben, bemerkt werden. Rührt der gröfsere Unterschied der Beobachtungen am 20. August wirklich von dieser Ursache her, so mufs das Etalon sich mehr erwärmt haben, als die weniger dicke Toise. Obgleich die Leitungsfähigkeit des Stahls für die Wärme, so viel ich weifs, nicht bekannt ist, so ist doch nicht wahrscheinlich, dafs sie *viel* gröfser als die des Eisens sein sollte; dann mufs man die Vermuthung eines Zusammenhanges zwischen der gröfseren Abweichung der Messungen und der gröfseren Veränderung der Wärme, entweder aufgeben, oder ihre Rechtfertigung darin suchen, dafs die Mitte der Messungszeiten des Preufsischen Etalons, wegen des Zeitverlustes, welchen die Anwendung der Abschiebe-Cylinder verursacht, wirklich etwas später eintrifft, als die Mitte der Messungszeiten der Toise. Wenn man aber den Einflufs nicht für ganz unmerklich hält, welchen so langsame Änderungen der Wärme, als in den Messungen vorgekommen sind, auf die Vergleichung beider Maafse äufsern, so mufs man den zufällig eingetretenen Umstand, dafs das Aufsteigen der Wärme, an den 8 Beobachtungstagen zusammengenommen, ihrem Abnehmen, mit einiger Annäherung gleich ist, als willkommen betrachten.

Damit eine unerkannte Wärmeverschiedenheit beider Maafse nicht einen Einflufs auf die Länge des Preufsischen Etalons erhalte, welcher so grofs ist, als der mittlere Fehler einer Messung ($= \pm 0^{l}{,}000254$) darf sie nicht über $0^{\circ}{,}06$ C. betragen. Wer die sehr grofsen Schwierigkeiten kennt, welche die Beobachtung der Wärme, von Luft umgebener fester Körper hat, und wer, so wie ich, oft erfahren hat, dafs sogar viele Vorsicht angewandt werden mufs, um nur die Voraussetzung der Gleichheit der Wärme zweier nebeneinanderliegender Stäbe von gleicher Beschaffenheit, innerhalb sehr enger Grenzen, sicher zu machen, der wird mit Vergnügen bemerken, wie erfolgreich die Anwendung des Weingeistbades gewesen ist. Aber weder dieses, noch das Übrige der Einrichtung des Apparates, hätte den Erfolg, so wie er wirklich ist, hervorbringen können, wenn seine *Ausführung* nicht, in allen wesentlichen Theilen, tadellos gewesen wäre. Ich benutze mit Vergnügen diese Gelegenheit, anzuerkennen, dafs die Leistung des Apparats meine Erwartung übertroffen hat.

Digitized by Google

Sechster Abschnitt.

Festsetzung der Einheit des Preufsischen Längenmaafses durch das Original desselben und Einrichtungen, welche seine Vervielfältigung ergeben werden.

§. 16.

Festsetzung der Einheit des Preufsischen Längenmaafses durch das Original desselben.

Der fünfte Abschnitt enthält die Untersuchungen, aus welchen hervorgegangen ist, dafs die Endflächen von Sapphir, des neuen, im dritten Abschnitte beschriebenen Originals des Preufsischen Längenmaafses, wenn es die Wärme von 16°,25 des hunderttheiligen Thermometers besitzt, in der Axe des Stabes gemessen, die Entfernung von 417,38939 solcher Linien haben, deren die zu den Pendelversuchen in Königsberg, Güldenstein und Berlin, so wie auch zu der Gradmessung in Ostpreufsen angewandte Copie der Toise du Pérou, in derselben Wärme, 863,9992 hat.

Die erste dieser Zahlen ist der Wahrheit so stark genähert, als ich sie ihr habe nähern können; dafs die andere in solchen Linien ausgedrückt wäre, deren die Toise du Pérou selbst genau 864 hat, ist eine Annahme, welche nicht bis auf eine so enge Grenze verbürgt werden kann (§. 4.), als, unter der Voraussetzung ihres Stattfindens, die Länge des Preufsischen Etalons. Da die Toise du Pérou nur in Paris zugänglich ist, so mufste, indem man das Verhältnifs des Preufsischen Originalmaafses zu ihr bestimmen wollte, ihre Stelle durch eine Copie vertreten werden; man hat *die* gewählt, welche schon zu den angeführten Messungen angewandt worden, auch länger als eine zweite und kürzer als eine dritte Copie ist. Durch diese Wahl ist, in aller Schärfe, erklärt, welche Länge als *Toise* angesehen werden soll.

Da drei Preufsische Fufs, dem Gesetze vom 16. Mai 1816 zufolge, = 417,39 Pariser Linien sind, so ist unser Etalon 0,00061 Pariser, oder

Digitized by Google

0,00063 Preufsische Linien kürzer als drei Preufsische Fufse. Dadurch erfährt die bestehende Einheit des Preufsischen Längenmaafses keine Änderung, sondern unser Original ergiebt sie genau so wie das Gesetz fordert, indem es nicht für drei Preufsische Fufse, sondern 0,00063 Linien kürzer als dieselben erklärt wird. Demzufolge ist auf den Stahlstab eingestochen worden:

> *Urmaafs der Preufsischen Längeneinheit.* 1837. *Dieser Stab, in der Wärme von* 16°,25 *des hunderttheiligen Thermometers, in seiner Axe gemessen, ist* 0,00063 *Linien kürzer als drei Fufse.*

Hierdurch ist das Preufsische Längenmaafs unzweideutig, und zugleich dem Gesetze entsprechend bestimmt; das letztere in soweit, als man das Pariser Maafs hat erkennen können.

Es war kein Grund vorhanden, die gesetzmäfsig schon bestehende Einheit des Preufsischen Längenmaafses abzuändern, aber es war nöthig, sie unzweideutig zu bestimmen. Die Länge, welche das Urmaafs zufällig erhalten hat, hätte nur dann zur *unmittelbaren* Erklärung von drei Preufsischen Fufsen gewählt werden dürfen, wenn der Fufs noch willkürlich gewesen wäre, oder wenn etwa gröfsere Leichtigkeit und Genauigkeit der Anwendungen eines ihn *genau* verdreifachenden Urmaafses, die Änderung des Bestehenden gerechtfertigt hätte. Beides ist aber nicht der Fall. Die mechanischen Mittel, durch deren Anwendung materielle Copien eines Maafses verfertigt werden können, können nicht Gleichheit derselben und des Originals, sondern nur Annäherung an dieselbe, gewähren; durch ihre Vervollkommnung wird die Grenze ihrer Verschiedenheit von dem Originale nur *verengt*. So sehr vervollkommnet sie aber auch sein mögen, so mufs die wiederholte Anwendung ihres Prinzips, die Grenze der Sicherheit der einmaligen Anwendung noch mehr verengen: der Fehler einer Copie mufs mit gröfserer Sicherheit bestimmt werden können, als sie selbst verfertigt werden kann. Möglichst vollkommene Copien eines Maafses werden also nur durch die Verfertigung selbst *vermittelt*, nicht *unmittelbar* gegeben, d. h. sie werden erst durch die Untersuchung des Unterschiedes zwischen dem Stabe, welcher sie darstellen soll, und dem Originale erlangt. Hierbei ist es vollkommen gleichgültig, ob das Original genau eine ganze Zahl von Einheiten des Längenmaafses darstellt, oder um einen Bruch einer Einheit davon verschieden ist, vorausgesetzt, dafs dieser Bruch nicht so grofs ist, dafs aus

Digitized by Google

seiner Messung Schwierigkeiten oder Unsicherheiten hervorgehen könnten. — Was ich von den Copien gesagt habe, gilt ebensowohl von dem Originale, falls es nicht willkürlich gelassen, sondern einer gegebenen Absicht entsprechend gemacht werden soll: diese Absicht wird, durch die vorhandenen mechanischen Mittel, so nahe erreicht, als diese sie zu erreichen erlauben; dann aber wird, durch spätere Untersuchungen, mit *gröfserer* Annäherung bestimmt, wie weit die Verfertigung von der sie leitenden Absicht entfernt geblieben ist: diese Untersuchung, und nicht die Verfertigung selbst, mufs die Festsetzung der Einheit des Maafses, welche durch die Einführung eines Originals beabsichtigt wird, ergeben. So wie sie festgesetzt ist, ist sie unzweideutig, und würde, in unserem Falle, nicht minder unzweideutig sein, wenn der Stab, der zur Kenntnifs von drei Preufsischen Fufsen führen soll, statt jetzt um eine, nur für sehr genaue Messungen merkliche Gröfse davon verschieden zu sein, um ein Zehntel einer Linie davon verschieden wäre.

Der Preufsische Fufs ist also, durch das jetzt eingeführte Original desselben, gegeben. Seine Länge, durch *die* Toise gemessen, welche als wahre Toise vorausgesetzt worden ist, ist, der Forderung des Gesetzes gemäfs, = 139,13 Linien dieser Toise. Da dieselbe Annahme der Toise der Messung der Länge des Secundenpendels in Berlin zum Grunde liegt, so wird, durch die Vergröfserung ihres, in Pariser Linien ausgedrückten Resultats, in dem Verhältnisse 139,13 : 144, die Forderung des Gesetzes erfüllt, welche verlangt, dafs diese Länge durch den Preufsischen Fufs angegeben werde. Die Länge des einfachen Secundenpendels habe ich, meiner in den Gedenkschriften der Königlichen Akademie der Wissenschaften für 1835 gedruckten Abhandlung zufolge, an einem Punkte neben der neuen Sternwarte, in einer Höhe von 17,77 Toisen über der Meeresfläche

= 440,7354 Pariser Linien

gefunden, welche, in Preufsischem Maafse ausgedrückt,

= 456,1626 Linien = 3 Fufs 2 Zoll 0,1626 Linien

sind. Diese Bestimmung ist, unter einer gewissen Annahme, auf die Meeresfläche reducirt, und dadurch in

440,7390 Pariser Linien

verwandelt worden, welche nach Preufsischem Maafse,

= 456,1663 Linien = 3 Fufs 2 Zoll 0,1663 Linien

sind.

Digitized by Google

§. 17.

Vervielfältigung des Preufsischen Längenmaafses durch Copien.

Ich habe schon angeführt, dafs eine der Absichten, welche durch die gegenwärtigen Bemühungen wegen des Preufsischen Längenmaafses erreicht werden sollten, seine *Verbreitung durch Copien* war, die eine *grofse Genauigkeit* besitzen und dennoch *leicht zu erlangen* sein sollen. Diese Forderung, deren Befriedigung frühere Bemühungen um das Maafswesen anderer Länder wenig berücksichtigen, hat den Weg vorgeschrieben, welchen die Arbeiten über das Preufsische, deren Mittheilung der Zweck dieser Abhandlung ist, genommen haben. Es ist noch nöthig, dafs ich auch die Maafsregeln bekannt mache, durch welche diese Forderung in der Folge befriedigt werden wird.

Vorab mufs ich bemerken, dafs zwar die Absicht vorhanden war, die Dauerhaftigkeit des Originals des Preufsischen Längenmaafses so grofs zu machen, dafs kein Bedenken obwalten kann, alle Copien, welche eine grofse Genauigkeit haben sollen, unmittelbar *von ihm selbst* zu nehmen, nicht aber die Absicht, das Original dem Misbrauche und vermeidlicher Gefahr auszusetzen. Misbrauch würde es sein, wenn man unmittelbar das Original anwenden wollte, um Stäbe damit zu vergleichen, deren Beschaffenheit selbst sich der Möglichkeit widersetzt, dadurch das Maafs *bestimmt* darzustellen; Gefahr bringt ihm jede Anwendungsart, welche, wenn nöthige Aufmerksamkeiten vernachlässigt werden, Veränderungen des Stabes hervorbringen kann. Genau genommen setzt *jede* Anwendung das Original des Maafses einer Gefahr aus; allein wenn man sie so einfach als möglich macht, d. h. alles von ihr entfernt, was nicht zu der Erlangung guter Copien *unumgänglich* nothwendig ist, erlangt man wenigstens die gröfste Sicherheit, welche mit dem Zwecke vereinbar ist. Ich habe für gut gehalten, die Vergleichung von Copien mit dem Originale, nicht in einem Bade von Weingeist, sondern in der Luft, anzuordnen; ich fürchtete, dafs Mangel an Sorgfalt in der Wahl der Flüssigkeit und in der jedesmaligen Reinigung des Stabes und des Apparates, Rost erzeugen und dadurch die Kanten unkenntlich machen könnte, deren Erhaltung wesentlich ist, weil die Axe des Stabes, in welcher seine Länge gemessen werden soll, durch sie bestimmt wird.

Digitized by Google

Hierdurch wird gefordert, daſs die Richtigkeit der Copien nicht sowohl von der *Kenntniſs* der Wärme, welche sie selbst und das Original, bei der Vergleichung besitzen, als von der Voraussetzung, daſs beide *gleich warm* sind, abhängig gemacht werde. Denn jene ist, nach meinen Erfahrungen, wenn es auf ein (die Länge des Originals schon um 0‴,0004 ändern-des) Zehntel eines Grades ankömmt, ohne die Anwendung einer Flüssigkeit gar nicht zu erlangen; diese aber kann, auch ohne dieselbe, innerhalb einer engen Grenze hervorgebracht werden, obgleich auch dazu schon eine zweckmäſsige Einrichtung erforderlich ist. Wenn die Wärme selbst nicht als scharf bekannt vorausgesetzt werden soll, so darf die Copie nicht von einem Metalle gemacht sein, welches sich beträchtlich verschieden von dem Stahle, durch die Wärme verändert; wäre sie z. B. von Messing gemacht, so würde eine Unrichtigkeit von einem Zehntel eines Thermometergrades, welche ihre und des Originals Wärme gemeinschaftlich träfe, einen Einfluſs von 0‴,0003 auf ihre Länge erhalten. Auch glaube ich nicht, daſs die Überzeugung von der *Gleichheit* der Wärme zweier nebeneinanderliegender Stäbe, vollständig werden kann, wenn sie aus verschiedenen Metallen bestehen, oder verschiedene Stärke besitzen; denn beide folgen dann den unvermeidlichen Schwankungen der äuſseren Wärme nicht mit gleicher Schnelligkeit. Dagegen haben später anzuführende Erfahrungen die Erwartung gerechtfertigt, daſs zwei Stahlstäbe, durch ihr hinreichend langes Nebeneinanderliegen, wenn die Einrichtung geeignet ist, so genau zu gleicher Wärme kommen, daſs ihre Ungleichheit die Genauigkeit nicht mehr erheblich beeinträchtigen kann, welche ich den Copien zu geben wünschte. Eine Unsicherheit über die absolute Wärme ist ganz ohne Einfluſs, wenn die Copie und das Original gleiche Ausdehnbarkeit besitzen; sie wird von unmerklichem Einfluſse, wenn ihre eigene Kleinheit mit der Kleinheit des Unterschiedes der Ausdehnbarkeiten der Copie und des Originals zusammenkommt, welche immer die Folge davon sein wird, daſs beide aus einem gleichen Metalle gemacht sind.

Ich habe also die Copien von *Stahl* gemacht vorausgesetzt, und werde nun beschreiben, welche Einrichtung Hr. *Baumann* ihnen giebt. Sie sind, wie das Original, quadratische Stäbe von Stahl, von 9 Linien Seite. Statt der Endflächen von Sapphir haben sie Endflächen von gehärtetem Stahl, welche, durch ein dem Künstler eigenthümliches Verfahren, genau senk-

Digitized by Google

recht auf die Axe des Stabes abgeschliffen und polirt sind. Um diese Endflächen zu schützen, ist der Stab an beiden Enden cylindrisch abgedrehet, und auf die cylindrischen Theile sind Hülsen von Messing geschoben, die man bei dem Gebrauche abnimmt; zugleich dienen diese cylindrischen Enden zur Erklärung der Axe des Stabes. Die Verbindung der gehärteten Endflächen mit dem ungehärteten Stabe ist sehr einfach; sie ist dadurch bewirkt, dafs die ersteren die Grundflächen äufserst schwach convergirender Kegel sind, welche in kegelförmige, der Axe des Stabes folgend eingearbeitete Löcher genau passen, und in diese eingeschoben werden, nachdem der Stab, bis er blau anläuft, erwärmt ist, worauf sie, durch sein schnelles Abkühlen in Wasser, fest werden.

Die so eingerichteten Stäbe haben näherungsweise die Länge von drei Preufsischen Fufsen. Sie werden, wie ich später näher angeben werde, mit dem Originale verglichen, und endlich mit einer Aufschrift versehen, welche ihr Verhalten zu drei Preufsischen Fufsen angiebt. Indem die Vergleichung in der Luft, nur wenn die Wärme derselben sich wenig schnell verändert, gemacht wird, gelangt man zur hinreichend nahen Kenntnifs der gemeinschaftlichen Wärme beider miteinander verglichenen Stäbe; wenn diese, dem hunderttheiligen Thermometer zufolge, $= t$ ist, so ist, nach dem 16ten und 11ten §., die Länge des Originals, in dieser Wärme:

$$= 3 \text{ Fufs} - 0^L{,}00063 + (t - 16^\circ{,}25)\, 0^L{,}004375.$$

Findet sich die Copie um die Gröfse d von dem Originale verschieden, so ist ihre Länge, in derselben Wärme:

$$= 3 \text{ Fufs} - 0^L{,}00063 + (t - 16^\circ{,}25)\, 0^L{,}004375 + d,$$

welche Bestimmung auf den Stab eingestochen wird, nämlich:

> 18... . *Dieser Stab, in der Wärme von ** Graden des hunderttheiligen Thermometers, in der Axe seiner cylindrischen Enden gemessen, ist ** Linien länger (kürzer) als 3 Preufsische Fufse.*

Will man die Copie anwenden, so mufs man ihre Veränderlichkeit durch die Wärme untersuchen, falls man nicht voraussetzen will, dafs diese eben so grofs sei, wie die des Originals. Die Aufschrift des Stabes giebt übrigens das Mittel, den Werth von d zu erkennen, welchen die unmittelbare Vergleichung gegeben hat.

Digitized by Google

§. 18.

Beschreibung des Apparates zur Vergleichung der Copien mit dem Originale des Preufsischen Längenmaafses.

Die 25te Fig. Taf. VI. zeigt den Apparat perspectivisch, Fig. 26. im Grundrisse und Fig. 27. im Durchschnitte. Seine Grundlage ist ein solider Balken von Mahagoniholz von 4 F. 6½ Z. Länge, 7 Z. 2 L. Breite und 7 Z. 2 L. Dicke, welcher auf zwei Füfsen steht, deren einer mit zwei Fufsschrauben, der andere mit einer, auf Unterlegeplatten ruhet. An seinen beiden Enden befinden sich die Mikrometer, welche die Vergleichung des Originals und der Copie ergeben. Diese beiden Stäbe liegen auf einem Wagen, welcher, mittelst fünf Rollen, auf eben so vielen Schienen, der Breite des Balkens nach, hin und zurück gefahren werden kann, so dafs beide Stäbe abwechselnd zwischen die Mikrometer gelangen. Um den Einflufs der Wärme des Körpers des Beobachters auf die Stäbe zu verhindern, ist der Apparat mit einem Kasten von Mahagoniholz überdeckt, aus welchem nur die Schrauben und Wasserwagen der Mikrometer hervorstehen. Unter dieser Bedeckung wird die Messung eines der Stäbe, und nach ihrer Beendigung die Bewegung des anderen in die Mikrometerlinie und auch seine Messung vorgenommen; es ist unnöthig etwas davon zu *sehen*, aufser der Angabe der Thermometer, deren eins auf jedem der Stäbe liegt, und deren Scalen, wenn die Stäbe sich zwischen den Mikrometern befinden, unter verglasete Öffnungen in der Decke des Kastens gelangen, welche, aufser bei der Ablesung, durch Deckel verschlossen werden. Diese Öffnungen sind, im Innern des Kastens, von einem hölzernen Rande umgeben, welcher bis fast auf die Thermometer herabgeht und ihre Kugeln vor der Strahlung nach und von äufseren Gegenständen schützt. Die Andeutung des Kastens auf Fig. 25. und die Durchschnittszeichnung Fig. 27. machen diese Bedeckung des Apparats und ihre Einrichtung anschaulich.

Eins der Mikrometer ist Taf. VII. Fig. 28. gröfser gezeichnet; seine Durchschnitte der Länge und Breite nach genommen Fig. 29. und 30., erläutern seine Einrichtung. Auf seinem Schlitten stehen zwei Y's, auf welchen der Cylinder *a* liegt, dessen vorderes, kugelförmig abgeschliffenes Ende, durch Drehung der Mikrometer-Schraube nach der linken Seite, mit der Endfläche des zu messenden Stabes in Berührung kommt,

Digitized by Google

bei fortgesetzter Drehung schiebt sich dieser Cylinder auf seinen Lagern zurück und wirkt nun mit seinem hinteren, konisch abgedrehten und kugelförmig abgerundeten Ende, auf den Hebelarm *b*, welcher an der, sich zwischen zwei Spitzen drehenden Axe *c* der Wasserwage *d* sitzt. Die Cylinder der Mikrometer sind von *hartem* Stahl, ausgezeichnet schön gearbeitet und fein polirt. Die Beschreibung der Mikrometer des im 1[ten] §. beschriebenen Apparates überhebt mich der Mühe, hier mehr Einzelnheiten zu erklären; sie sind zwar nicht unerheblich von den Mikrometern des neueren Apparates verschieden, allein das was ich hier angeführt habe und die Zeichnungen werden über die Einrichtung der letzteren keinen Zweifel übrig lassen.

Die Mittel, die beiden Stäbe nach und nach, und so oft wiederholt als man will, zwischen die Mikrometer zu bringen, müssen näher beschrieben werden. Die Construction der fünf Rollen, auf welchen der Wagen läuft, und wie sie auf den Schienen ruhen, geht aus der Durchschnittszeichnung Fig. 31. hervor. Die Schienen haben Stellschrauben, wodurch sowohl ihr Parallelismus berichtigt, als auch ihre Oberfläche in Eine Ebene gebracht werden kann; wenn dieses geschehen ist, bewegt sich der Wagen eben so sicher, als sanft. Er wird durch zwei Gewichte, an Fäden welche über Rollen *ff* (Fig. 26. und 27.) laufen, fortwährend nach der hinteren Seite des Apparates gezogen, in der entgegengesetzten Richtung aber durch die Schraube *g* (Fig. 25. und 26.) bewegt. Um die auf ihm liegenden Stäbe, nach einer Bewegung des Wagens, stets wieder in die Lage zu bringen, in welcher sie sein sollen, sind zwei Paare von Arretirungen vorhanden, welche man Fig. 25, 26. und 27. sieht. Das eine Paar *ee* bestimmt die Lage des Stabes, welcher an der vorderen Seite des Apparates liegt; es besteht aus zwei, auf dem Balken festen Stücken von Messing, gegen welche die kugelförmigen Enden zweier Schrauben stofsen, die sich in Armen befinden, welche von dem Wagen herabgehen; das andere Paar der Arretirungen *e′e′* kann durch Drehung der Handhaben *hh* Fig. 25, 26. und 27. bis zur Ebene des Balkens versenkt werden, so dafs die Arme am Wagen, deren Schrauben gegen sie stofsen sollen, über sie hinweggehen und erst, nachdem sie wieder emporgedreht sind, auf ihre Flächen treffen. Durch die Schrauben an den, der Arretirungen wegen vorhandenen vier Armen des Wagens, können dieselben in beliebigen Lagen der Stäbe bewirkt wer-

Digitized by Google

den; so lange die Schrauben nicht gedrehet werden, bleiben diese Lagen in aller Schärfe unverändert.

Nicht minder wesentlich zur genauen Vergleichung der Stäbe, als die eben beschriebene Einrichtung, ist die Art die Stäbe aufzulegen und ihre Axen in die Mikrometerlinie zu bringen. Auf dem Wagen, und zwar über den äufseren seiner fünf Rollen, befinden sich die Lager der Stäbe, deren eins Fig. 32. gezeichnet ist. Das Lager jedes Stabes besteht aus 4 Schrauben; auf den kugelförmigen Köpfen zweier derselben liegt der Stab, dessen Höhe durch ihre Drehung verändert werden kann; die ähnlich geformten Köpfe der beiden anderen Schrauben treffen auf die lothrechten Seiten des Stabes, an Punkten, welche sehr wenig über seiner unteren Fläche liegen, und dienen also, ihn in beliebiger Lage, vor jeder Seitenbewegung zu sichern. Um die Axe des Stabes, nachdem der Wagen, durch die Arretirung, seine bestimmte Stelle erhalten hat, in die Mikrometerlinie zu bringen, ist eine Hülse Fig. 33. vorhanden, welche auf den Mikrometer-Cylinder geschoben wird und einen mit einer Stellschraube versehenen Arm trägt, dessen Drehung mit dem Cylinder, die kugelförmige Spitze dieser Schraube einen Kreis um die Mikrometerlinie beschreiben läfst, welcher die Kanten des Originals berühren mufs, was durch die Schrauben der Lager bewirkt werden kann. Die Copien, welche cylindrische Enden haben, können durch dieses Mittel weniger leicht richtig aufgelegt werden, wefshalb eine zweite Hülse (Fig. 34.) verfertigt worden ist, welche einen kleinen Fühlhebel trägt, dessen kürzerer Arm die Stelle der kugelförmigen Schraubenspitze der vorigen vertritt, und welche übrigens wie diese angewandt wird. Obgleich man, auf diese Art, die Axen beider Stäbe, ziemlich genau in die Mikrometerlinie bringen kann, so halte ich doch für unerläfslich, dafs eine vorgenommene Vergleichung derselben nach ihrer *Umwendung* wiederholt werde. Diese macht eine Unvollkommenheit der Centrirung unschädlich, indem beide Auflegungen zwei Punkte der Endfläche in die Mikrometerlinie bringen, zwischen welchen die Axe des Stabes genau in der Mitte liegt. Man erlangt diese Umwendung so, dafs die Axe des Stabes ihre Lage unverändert beibehält, indem man *eine* der Seitenschrauben des Lagers löset, die andern aber unverrückt läfst und den umgewandten Stab durch jene wieder befestigt. Wenn man dieses richtige Verfahren befolgt, darf man auf die Centrirung nicht die äufserste Sorgfalt verwenden.

Digitized by Google

§. 19.

Untersuchung der Mikrometerschrauben des Apparats.

Das hierbei befolgte Verfahren ist genau dasselbe, welches ich §. 13. dargestellt und auf die Mikrometer des im 1ten §. beschriebenen Apparats angewandt habe. Ich bezeichne die beiden Mikrometer des neueren Apparats gleichfalls durch I und II, und zwar ist I auf der rechten, II auf der linken Seite, wenn man vor der Seite des Apparats steht, welche in den Zeichnungen die vordere ist.

a. Schraubendrehungen des Mikrometers I.

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
75,0	1,661	76,0	1,656	77,0	1,664	78,0	1,660	79,0	1,662	80,0	1,662	81,0	1,665	82,0	1,661	83,0	1,663
75,1	661	76,1	657	77,1	660	78,1	661	79,1	661	80,1	660	81,1	662	82,1	661	83,1	660
75,2	658	76,2	658	77,2	659	78,2	658	79,2	659	80,2	660	81,2	659	82,2	659	83,2	661
75,3	662	76,3	657	77,3	659	78,3	660	79,3	659	80,3	662	81,3	657	82,3	659	83,3	661
75,4	663	76,4	662	77,4	659	78,4	664	79,4	662	80,4	661	81,4	662	82,4	661	83,4	664
75,5	659	76,5	661	77,5	662	78,5	664	79,5	662	80,5	664	81,5	662	82,5	659	83,5	662
75,6	655	76,6	660	77,6	656	78,6	661	79,6	660	80,6	662	81,6	660	82,6	662	83,6	662
75,7	651	76,7	656	77,7	649	78,7	656	79,7	659	80,7	660	81,7	655	82,7	654	83,7	659
75,8	655	76,8	654	77,8	654	78,8	657	79,8	657	80,8	660	81,8	658	82,8	658	83,8	659
75,9	659	76,9	660	77,9	659	78,9	661	79,9	661	80,9	662	81,9	665	82,9	660	83,9	661

b. Schraubendrehungen des Mikrometers II.

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
75,0	1,653	76,0	1,654	77,0	1,654	78,0	1,655	79,0	1,655	80,0	1,655	81,0	1,656	82,0	1,657	83,0	1,656
75,1	652	76,1	653	77,1	654	78,1	656	79,1	656	80,1	657	81,1	657	82,1	658	83,1	658
75,2	653	76,2	653	77,2	656	78,2	655	79,2	659	80,2	657	81,2	658	82,2	659	83,2	659
75,3	657	76,3	655	77,3	659	78,3	655	79,3	658	80,3	659	81,3	658	82,3	659	83,3	660
75,4	659	76,4	655	77,4	654	78,4	655	79,4	657	80,4	659	81,4	658	82,4	660	83,4	659
75,5	656	76,5	656	77,5	655	78,5	656	79,5	658	80,5	657	81,5	658	82,5	658	83,5	657
75,6	659	76,6	659	77,6	657	78,6	658	79,6	658	80,6	659	81,6	659	82,6	660	83,6	660
75,7	658	76,7	658	77,7	657	78,7	660	79,7	659	80,7	660	81,7	659	82,7	659	83,7	659
75,8	660	76,8	657	77,8	658	78,8	658	79,8	658	80,8	659	81,8	659	82,8	659	83,8	659
75,9	658	76,9	655	77,9	653	78,9	656	79,9	657	80,9	658	81,9	658	82,9	655	83,9	658

Eine kleine, periodische Ungleichheit der Schrauben erkennt man aus dem Mittel jeder der 10 Zeilen dieser Verzeichnisse, nämlich:

Digitized by Google

	Mikrometer		Unterschiede vom Mittel	
	I	II	I	II
R	R	R	R	R
79,0	1,6616	1,6550	+ 0,0018 . 2	+ 0,0021 . 8
79,1	6603	6557	+ 0,0005 . 8	+ 0,0016 . 1
79,2	6590	6566	− 0,0007 . 2	+ 0,0005 . 8
79,3	6596	6578	− 0,0001 . 2	− 0,0006 . 2
79,4	6620	6573	+ 0,0022 . 8	− 0,0001 . 2
79,5	6617	6568	+ 0,0019 . 8	+ 0,0003 . 8
79,6	6598	6588	+ 0,0000 . 8	− 0,0016 . 2
79,7	6554	6588	− 0,0043 . 2	− 0,0016 . 2
79,8	6569	6586	− 0,0028 . 2	− 0,0014 . 2
79,9	6609	6564	+ 0,0011 . 8	+ 0,0007 . 8
Mittel...............	1,65972	1,65718		

Die Formeln zur Reduction der Angaben der Schrauben auf die Werthe, welche sie ohne die kleine periodische Ungleichheit haben würden, finden sich aus den beiden letzten Columnen dieses Verzeichnifses:

$$\text{I} \ldots\ldots\ a - 0{,}000411^R \cos a + 0{,}000676^R \sin a + 0{,}000911^R \cos 2a - 0{,}001128^R \sin 2a$$

$$\text{II} \ldots\ldots\ a + 0{,}000784 \cos a + 0{,}000122 \sin a + 0{,}000075 \cos 2a - 0{,}000055 \sin 2a$$

und durch ihre Anwendung werden die vorher gefundenen Unterschiede auf folgende gebracht:

	I	II
R	R	R
79,0	− 0,0003 . 8	− 0,0000 . 2
79,1	− 0,0001 . 5	+ 0,0004 . 3
79,2	+ 0,0003 . 0	− 0,0002 . 6
79,3	− 0,0000 . 4	+ 0,0002 . 4
79,4	− 0,0000 . 4	+ 0,0000 . 4
79,5	− 0,0003 . 9	− 0,0004 . 5
79,6	+ 0,0008 . 9	+ 0,0003 . 5
79,7	− 0,0006 . 9	− 0,0003 . 5
79,8	− 0,0000 . 7	+ 0,0001 . 1
79,9	+ 0,0005 . 8	− 0,0000 . 4

Die Werthe einer ganzen Drehung der beiden Schrauben sind, wieder wie §. 13., aus der Messung der Zwischenräume von $0^L{,}6$ zu $0^L{,}6$ des ganzen *Pistor* und *Schick*'schen Zolles hervorgegangen, und zwar aus zwei-

Digitized by Google

maliger Wiederholung derselben, sowohl von dem Anfangspunkte $75^R,0$, als auch von dem Anfangspunkte $79^R,9$ aus:

	Mikrometer I		Mikrometer II	
Anfang	^{R} 75,000	^{R} 79,900	^{R} 75,000	^{R} 79,900
^{L} 0,0 bis ^{L} 0,6	^{R} 4,9005	^{R} 4,896	^{R} 4,8935	^{R} 4,8985
0,6 — 1,2	922	9195	9185	9175
1,2 — 1,8	9045	903	8955	907
1,8 — 2,4	8885	8885	884	8855
2,4 — 3,0	8915	8925	8885	8865
3,0 — 3,6	8935	8945	890	8925
3,6 — 4,2	8925	901	9015	898
4,2 — 4,8	8825	8905	881	883
4,8 — 5,4	9045	9045	9025	9025
5,4 — 6,0	912	9155	912	9085
6,0 — 6,6	888	8915	8845	8885
6,6 — 7,2	877	8895	8705	875
7,2 — 7,8	9015	902	897	898
7,8 — 8,4	8975	893	8885	894
8,4 — 9,0	882	882	879	8765
9,0 — 9,6	901	899	8915	8885
9,6 — 10,2	8775	882	8795	8785
10,2 — 10,8	911	917	9085	908
10,8 — 11,4	900	9035	903	8975
11,4 — 12,0	9145	914	9055	9125
Summe.....................	97,942	97,979	97,8745	97,8965
$\frac{1}{20}$ Zoll $= 0^L,600275$......	4,89710	4,89895	4,89373	4,89483

Verbessert man die Anfangs- und Endpunkte des durch die Schrauben gemessenen Raumes durch die obigen Formeln, so verwandeln sie sich in:

Anfangspunkt	^{R} 75,00056	^{R} 79,90066	^{R} 74,99915	^{R} 79,89966
Endpunkt	79,89776	84,79809	79,89347	84,79568
Zwischenraum	4,89720	4,89743	4,89432	4,89602

Man erhält daraus, indem man den Zwischenraum, so wie die Mikrometerschrauben ihn ergeben haben, mit dem im 13ten §. gefundenen Werthe des Zwanzigstels des Zolles $= 0^L,600275$ vergleicht, den Werth einer Drehung der Schrauben, an zwei verschiedenen Stellen derselben gemessen:

Mikrometer I	Mikrometer II
für $77^R,4486 = 0^L,1225751$	für $77^R,4469 = 0^L,1226472$
$82,3495 = 0,1225694$	$82,3474 = 0,1226047$

Digitized by Google

und hieraus ferner die Reduction einer beobachteten und durch die periodische Formel verbesserten Angabe a' der Mikrometer auf 80^R, unter der Annahme der Gleichförmigkeit der Veränderung des Werthes der Schraubendrehungen:

$$\text{für das Mikrometer I} = \overset{L}{0,}1225721\,(a'-80) - \overset{L}{0,}00000058\,(a'-80)^2$$
$$- \quad - \quad \text{II} = 0,1226251\,(a'-80) - 0,00000434\,(a'-80)^2$$

Da aber der gegenwärtige Apparat nur zur Vergleichung *Preufsischer* Maafsstäbe gebraucht wird, so ist es bequemer, die Angaben der Mikrometer unmittelbar in *Preufsische* Linien zu verwandeln; hierdurch werden die Formeln:

$$\text{für das Mikrometer I} = \overset{L}{0,}1268625\,(a'-80) - \overset{L}{0,}00000060\,(a'-80)^2$$
$$- \quad - \quad \text{II} = 0,1269175\,(a'-80) - 0,00000449\,(a'-80)^2.$$

§. 20.

Über die äufseren Erfordernisse genügender Vergleichungen von Copien des Preufsischen Längenmaafses.

Der Apparat kann nur die Genauigkeit gewähren, welche seiner mechanischen Vollendung angemessen ist, wenn die Voraussetzung, auf welcher er beruhet, erfüllt wird, nämlich die Voraussetzung, dafs beide Stäbe gleiche Wärme besitzen. Dieses soll durch hinreichend langes Nebeneinanderliegen der Stäbe, und durch den Schutz vor Strahlung der Wärme, welchen ihnen der übergedeckte Kasten von Holz verleihet, erreicht und trotz der, bei den Messungen selbst nothwendigen Nähe des Beobachters, erhalten werden. Wenn man aber bedenkt, dafs eine Verschiedenheit der Wärme beider Stäbe, von einem Vierzigstel eines Thermometergrades ihre relative Länge schon um $\overset{L}{0,}0001$ verändert, so mufs man, falls *so kleine* Gröfsen nicht als die Kraft der Vergleichungen überschreitend angesehen werden sollen, die Nothwendigkeit einer besonderen Untersuchung anerkennen, deren Resultat die Erkenntnifs der Bedingungen sein soll, unter welchen, auf mehr oder weniger nahe Gleichheit der Wärme beider Stäbe zu rechnen ist.

Als ich die Leistungen des Apparats zu prüfen anfing, indem ich das Original des Preufsischen Längenmaafses mit einem anderen Stabe von

Digitized by Google

Stahl (*) verglich, hatte ich denselben in dem geheizten Zimmer der Sternwarte aufgestellt, in welchem ich wohne. Ich erkannte aber bald, dafs *hier* nur eine geringe Sicherheit erreichbar war; einer Messung der Längenunterschiede beider Stäbe, wurde durch eine andere, eine Stunde später gemachte, gewöhnlich widersprochen und der Unterschied beider ging oft bis auf mehr als ein Tausentel einer Linie. Es blieb nicht zweifelhaft, dafs die ungleiche Vertheilung und die Veränderlichkeit der Wärme im Zimmer, Ursachen dieser Unvollkommenheit der Vergleichungen waren; ich versuchte vergebens, sie durch Änderungen des Ortes des Apparats wegzuschaffen, indem ich beiden Stäben eine, so viel es die Örtlichkeit erlaubte, symmetrische Lage gegen den Ofen und die Fenster gab, auch eins der Fenster verdunkelte und den Ofen durch einen Schirm verdeckte. Ich mufste also einen günstigeren Ort für den Apparat wählen; dieser fand sich in einem gewölbten Zimmer des Kellergeschosses der Sternwarte, welches in jeder Beziehung so geeignet war, dafs ich daselbst zu machende Beobachtungen als von den äufseren Umständen begünstigt, ansehen durfte. Hier machte ich, zwischen dem 21. und 30. Nov. 1837 eine Reihe von 56 Vergleichungen. Nachher, als die Wärme, im nördlichen Saale der Sternwarte, bis beinahe auf den Gefrierpunkt herabgekommen war, und nur langsame Veränderungen erfuhr, stellte ich den Apparat daselbst auf, und machte auch hier, zwischen dem 11. und 21. Dec. eine Reihe von 60 Vergleichungen. Endlich, um durch eine regelmäfsige Versuchsreihe genau zu erkennen, wie grofs die Unsicherheiten sind, welche ungünstige äufsere Umstände hervorbringen, nahm ich den Apparat wieder in das geheizte Zimmer und machte hier, zwischen dem 21. Febr. und 4. März 1838, 44 Vergleichungen; der Apparat stand dabei 12 Fufs vom Ofen und 3 Fufs von der ihm entgegengesetzten Wand; gemessen wurde nur, wenn ich die Wärme nicht für schnell steigend oder fallend hielt.

Die Anordnung dieser drei Beobachtungsreihen ist folgende. Nachdem die Stäbe und ihre Thermometer auf den Apparat gelegt und näherungsweise centrirt waren, wurde der Kasten von Holz übergedeckt; in diesem Zustande blieb Alles mehrere Stunden lang. Die dann vorgenom-

(*) Dieser Stab ist zwar keine der Copien, von welchen ich im 17ten §. geredet habe; allein für den gegenwärtigen Zweck ist dieses gleichgültig.

Digitized by Google

mene Vergleichung bestand darin, dafs erst einer der Stäbe zwischen die Mikrometer geführt und gemessen wurde, dann der andere, dann wieder dieser und endlich wieder der erste. Solche *vier* Messungen ergeben *eine* Vergleichung; nur *zwei* Messungen würden im Resultate die Voraussetzung gelassen haben, dafs die Wärme, während der Zeit, welche ihre Aufstellung erforderte, sich nicht verändert habe. Unmittelbar nach dieser Vergleichung machte ich, ein Paar Ausnahmen abgerechnet, eine zweite, der vorigen ganz ähnliche und nur dadurch von ihr verschiedene, dafs ich auf die andere Seite des Apparats trat, also den vorher nächsten Stab zu dem entferntesten machte. Diese Vergleichungen waren aber noch von der Voraussetzung der genauen Centrirung der Stäbe abhängig, und konnten nur zum wahren Resultate führen, nachdem das Mittel aus dem ihrigen und dem Resultate anderer, nach der *Umwendung* der Stäbe gemachten Vergleichungen genommen war.

Ich vermeide die Anführung jeder einzelnen Ablesung der Mikrometer, weil sie zu viel Raum erfordern würde und es hier nicht sowohl auf die Erfindung der Länge des zweiten Stabes, als auf das Verhalten des Apparats unter verschiedenen Umständen abgesehen ist. Einige der Vergleichungen werde ich, in dem folgenden, die fernere Anwendung der zum Copiren der Preufsischen Maafseinheit ergriffenen Maafsregeln betreffenden Paragraphen, in ihrer ganzen Ausdehnung mittheilen. Die Resultate der einzelnen Vergleichungen waren die folgenden:

1ste *Reihe der Vergleichungen.*

No.		Zeit	Obere Seite der Stäbe	Wärme	Gemessener Unterschied
		h ′		°C	L
1	Nov. 21	2 15	·	9,25	— 0,0022
2			——	9,26	— 0,0023
3	21	3 45	——	9,28	— 0,00235
4			——	9,32	— 0,00215
5	21	5 15	——	8,97	— 0,00215
6			——	8,99	— 0,00215
7	21	6 45	——	9,12	— 0,00175
8			——	9,16	— 0,00215
9	22	20 15	——	8,51	— 0,0022
10			——	8,45	— 0,00205
11	23	7 45	——	7,87	— 0,0021

Digitized by Google

No.		Zeit	Obere Seite der Stabe	Wärme	Gemessener Unterschied
		h '		C D	L
12			.	7,91	— 0,0022
13	Nov. 23	20 45	...	7,87	— 0,0015
14			—	7,92	— 0,0014
15	24	2 45	—	8,06	— 0,00175
16			—	8,18	— 0,00165
17	24	8 15	—	8,12	— 0,0016
18			—	8,23	— 0,0016
19	24	9 45	—	8,23	— 0,0018
20			—	8,32	— 0,0016
21	24	20 15	—	8,26	— 0,0018
22			—	8,27	— 0,0017
23	24	23 15	—	8,27	— 0,00185
24			—	8,27	— 0,00165
25	25	22 15	..	8,23	— 0,00275
26			—	8,28	— 0,0026
27	25	23 45	—	8,30	— 0,0025
28			—	8,32	— 0,00265
29	26	2 15	—	8,33	— 0,0026
30			—	8,38	— 0,00285
31	26	3 45	—	8,40	— 0,00275
32			—	8,48	— 0,0028
33	27	21 15	....	8,16	— 0,0013
34			—	8,27	— 0,00145
35	27	23 45	—	8,22	— 0,0013
36			—	8,28	— 0,0013
37	28	2 45	—	8,30	— 0,00155
38			—	8,38	— 0,0010
39	28	6 30	—	8,28	— 0,0008
40			—	8,39	— 0,00135
41	28	21 50	....	8,10	— 0,0016
42			—	8,26	— 0,00155
43	28	23 0	—	8,25	— 0,00155
44			—	8,28	— 0,00155
45	29	2 50	..	8,22	— 0,00205
46			—	8,31	— 0,0021
47	29	6 50	—	8,17	— 0,0021
48			—	8,25	— 0,0019
49	29	20 45	.	8,14	— 0,00165
50			—	8,23	— 0,0016
51	29	23 15	—	8,21	— 0,0017
52			—	8,28	— 0,00165
53	30	3 0	...	8,26	— 0,00205
54			—	8,33	— 0,0022
55	30	8 0	—	8,35	— 0,0021
56			—	8,47	— 0,0020

Digitized by Google

2te *Reihe der Vergleichungen.*

No.		Zeit	Obere Seite der Stäbe	Wärme	Gemessener Unterschied
		h ′		C 0	L
57	Dec. 11	5 0	•	1,31	— 0,0020
58			—	1,35	— 0,00195
59	11	7 0	—	1,21	— 0,00165
60			—	1,25	— 0,00205
61	11	10 0	—	0,98	— 0,0015
62			—	1,08	— 0,0018
63	11	23 30	—	0,73	— 0,0019
64			—	0,78	— 0,00215
65	12	3 0	—	0,84	— 0,0022
66			—	0,89	— 0,00235
67	12	6 0	•••	0,91	— 0,0010
68			—	0,97	— 0,00105
69	12	7 45	—	0,93	— 0,0013
70			—	1,12	— 0,00145
71	12	23 0	—	0,85	— 0,0013
72			—	0,88	— 0,0015
73	13	2 0	—	0,96	— 0,00075
74			—	0,99	— 0,00135
75	13	3 30	—	1,02	— 0,00165
76			—	1,12	— 0,00115
77	13	21 15	••	0,43	— 0,0013
78			—	0,42	— 0,00165
79	13	23 40	—	0,30	— 0,0015
80			—	0,33	— 0,00105
81	14	7 15	••••	0,44	— 0,0014
82			—	0,55	— 0,0009
83	14	23 0	—	1,82	— 0,0010
84			—	1,90	— 0,00085
85	15	21 0	••••	1,07	— 0,00095
86			—	1,14	— 0,0011
87	15	22 15	—	1,13	— 0,0010
88			—	1,20	— 0,00115
89	15	23 45	••	1,38	— 0,0016
90			—	1,42	— 0,00195
91	16	2 30	—	1,46	— 0,0020
92			—	1,53	— 0,0019
93	16	21 0	•	0,89	— 0,00085
94			—	0,90	— 0,0014
95	16	22 30	—	0,89	— 0,0012
96			—	0,91	— 0,00145

Digitized by Google

No.		Zeit	Obere Seite der Stabe	Wärme	Gemessener Unterschied
		h ′		C 0	L
97	Dec. 17	3 15	...	1,39	— 0,00145
98			——	1,41	— 0,0022
99	17	23 30	——	1,34	— 0,00215
100			——	1,40	— 0,00215
101	18	23 0	...	2,64	— 0,0016
102			——	2,75	— 0,0021
103	19	0 30	——	2,95	— 0,0022
104			——	3,05	— 0,0018
105	19	21 0	.	2,99	— 0,0011
106			——	3,04	— 0,00095
107	19	23 0	——	3,02	— 0,0009
108			——	3,08	— 0,0008
109	20	3 0	....	3,10	— 0,0008
110			——	3,14	— 0,0009
111	20	21 0	——	1,23	— 0,00085
112			——	1,22	— 0,0008
113	21	0 0	..	0,88	— 0,00255
114			——	0,90	— 0,00265
115	21	3 0	——	0,72	— 0,0023
116			——	0,73	— 0,00235

3te *Reihe der Vergleichungen.*

		h ′		C 0	L
117	Febr. 21	4 0	.	15,17	— 0,00145
118			——	15,15	— 0,00175
119	21	20 0	——	11,87	— 0,0016
120		21 0	——	12,87	— 0,0021
121	21	23 0	...	14,13	— 0,0012
122			——	14,22	— 0,00045
123	22	3 30	——	14,61	— 0,00155
124			——	14,62	— 0,00125
125	23	20 0	....	16,27	— 0,0010
126			——	16,37	— 0,0013
127	23	23 30	——	19,03	— 0,00105
128			——	19,08	— 0,0016
129	24	3 0	.	21,31	— 0,00125
130			——	21,27	— 0,00085
131	24	5 30	——	20,65	— 0,00205
132			——	20,60	— 0,0023

Digitized by Google

No.		Zeit	Obere Seite der Stäbe	Wärme	Gemessener Unterschied
		h ′		°C	L
133	Febr. 24	20 0	•	13,82	— 0,0024
134			——	13,89	— 0,0027
135	24	20 0	——	14,60	— 0,00215
136			——	14,70	— 0,00255
137	25	2 0	•••	16,35	— 0,00195
138			——	16.41	— 0,00175
139	25	23 30	——	17,27	— 0,00155
140			——	17,34	— 0,0020
141	26	23 30	••	15,35	— 0,0019
142	27	2 0	——	16,22	— 0,0028
143			——	16,23	— 0,0022
144	27	5 0	——	16,08	— 0,0030
145			——	16,07	— 0,0023
146			——	16,07	— 0,0021
147	28	4 0	••••	15,88	— 0,0019
148			——	16,00	— 0,0019
149	März 1	0 0	——	16,82	— 0,0012
150			——	16,88	— 0,0016
151	1	2 0	——	17,38	— 0,00215
152			——	17.42	— 0,00205
153	3	3 10	••••	16,08	— 0,00235
154			——	16,06	— 0,0022
155	3	5 0	——	15,93	— 0,00155
156			——	15,92	— 0,00175
157	4	0 0	••	17,74	— 0,00335
158			——	17,77	— 0,0019
159	4	3 0	——	17,84	— 0,00215
160			——	17,86	— 0,00195

Diese Vergleichungen der beiden Stäbe geben zuerst Anlafs zu bemerken, dafs die Nähe des Beobachters bei dem Apparate, trotz seiner Verdeckung durch einen Kasten von Holz, nicht ohne Einflufs auf die Thermometer geblieben ist; denn in der Regel zeigt die zweite Vergleichung eine um einige Hundertel eines Thermometergrades gröfsere Wärme als die erste; die seltenen Ausnahmen hiervon werden von einer Abnahme der äufseren Wärme herrühren, welche gröfser war als die von dem Beobachter erzeugte Zunahme. Es ist zu erwarten, dafs die Stäbe kleinere Änderungen der Wärme erfahren haben, als die dafür empfindlicheren Thermometer; immer aber erscheint die Maafsregel, *zwei* Vergleichungen nacheinander, in geänderter Stellung des Beobachters zu machen, nicht überflüssig.

Digitized by Google

Ferner geben die Vergleichungen Anlafs zu bemerken, dafs die drei Reihen derselben von sehr verschiedener Sicherheit sind. Um dieses unter eine unmittelbare Übersicht zu bringen, werde ich die einzelnen Vergleichungen paarweise combiniren, so dafs die erste vor und die letzte nach einer Umwendung der Stäbe, die zweite vor und die vorletzte nach derselben u. s. w. vereinigt werden; endlich werde ich die aufeinanderfolgenden Paare, zwischen welchen, der vorigen Bemerkung zufolge, eine Verbindung vorhanden ist, wieder zusammennehmen. Die die erste Verbindung enthaltende Columne zeigt, durch den daraus sichtbaren Grad der Übereinstimmung ihrer verschiedenen Zahlen, auf wie grofse Sicherheit der Copie man rechnen darf, wenn man *eine* Vergleichung vor und *eine* nach der Umwendung macht; aus der die zweite Verbindung enthaltenden Columne geht hervor, welche Sicherheit von zwei zusammengehörigen Vergleichungen, sowohl vor als nach der Umwendung, zu erwarten ist.

1ste *Reihe der Vergleichungen.*

Combination	Wärme	1 Vergleichung	2 Vergleichungen	Unterschied vom Mittel
	°	L	L	L
1 und 24	8,77	— 0,00193	— 0,00200	— 0,00010
2 — 23	8,77	— 0,00207		
3 — 22	8,77	— 0,00203	— 0,00200	— 0,00010
4 — 21	8,79	— 0,00197		
5 — 20	8,65	— 0,00188	— 0,00193	— 0,00003
6 — 19	8,61	— 0,00197		
7 — 18	8,67	— 0,00168	— 0,00177	+ 0,00013
8 — 17	8,64	— 0,00187		
9 — 16	8,35	— 0,00193	— 0,00191	— 0,00001
10 — 15	8,25	— 0,00190		
11 — 14	7,90	— 0,00175	— 0,00180	+ 0,00010
12 — 13	7,89	— 0,00185		
25 — 40	8,31	— 0,00205	— 0,00188	+ 0,00002
26 — 39	8,28	— 0,00170		
27 — 38	8,34	— 0,00175	— 0,00192	— 0,00002
28 — 37	8,31	— 0,00210		
29 — 36	8,30	— 0,00195	— 0,00201	— 0,00011
30 — 35	8,30	— 0,00208		
31 — 34	8,34	— 0,00210	— 0,00208	— 0,00018
32 — 33	8,32	— 0,00205		

Digitized by Google

Combination	Wärme	1 Vergleichung	2 Vergleichungen	Unterschied vom Mittel
	o	L	L	L
41 und 48	8,18	— 0,00175	— 0,00179	+ 0,00011
42 — 47	8,21	— 0,00182		
43 — 46	8,28	— 0,00183	— 0,00181	+ 0,00009
44 — 45	8,25	— 0,00180		
49 — 56	8,30	— 0,00182	— 0,00183	+ 0,00007
50 — 55	8,29	— 0,00185		
51 — 54	8,27	— 0,00195	— 0,00190	0,00000
52 — 53	8,27	— 0,00185		
Mittel	8,38		— 0,00190	

2te *Reihe der Vergleichungen.*

	o	L	L	L
57 und 76	1,22	— 0,00158	— 0,00169	— 0,00017
58 — 75	1,18	— 0,00180		
59 — 74	1,10	— 0,00150	— 0,00145	+ 0,00007
60 — 73	1,11	— 0,00140		
61 — 72	0,93	— 0,00150	— 0,00153	— 0,00001
62 — 71	0,97	— 0,00155		
63 — 70	0,92	— 0,00167	— 0,00170	— 0,00018
64 — 69	0,86	— 0,00173		
65 — 68	0,90	— 0,00162	— 0,00170	— 0,00018
66 — 67	0,90	— 0,00178		
77 — 84	1,17	— 0,00107	— 0,00120	+ 0,00032
78 — 83	1,12	— 0,00132		
79 — 82	0,42	— 0,00120	— 0,00121	+ 0,00031
80 — 81	0,39	— 0,00123		
85 — 92	1,30	— 0,00142	— 0,00149	+ 0,00003
86 — 91	1,30	— 0,00155		
87 — 90	1,28	— 0,00148	— 0,00143	+ 0,00009
88 — 89	1,29	— 0,00137		
93 — 100	1,15	— 0,00150	— 0,00164	— 0,00012
94 — 99	1,12	— 0,00178		
95 — 98	1,15	— 0,00170	— 0,00157	— 0,00005
96 — 97	1,15	— 0,00145		
101 — 108	2,86	— 0,00120	— 0,00135	+ 0,00017
102 — 107	2,88	— 0,00150		
103 — 106	3,00	— 0,00157	— 0,00151	+ 0,00001
104 — 105	3,02	— 0,00145		

Digitized by Google

Combination	Wärme	1 Vergleichung	2 Vergleichungen	Unterschied vom Mittel
	o	L	L	L
109 und 116	1,91	— 0,00158	— 0,00159	— 0,00007
110 — 115	1,93	— 0,00160		
111 — 114	1,07	— 0,00175	— 0,00171	— 0,00019
112 — 113	1,05	— 0,00167		
Mittel	1,35	....	— 0,00152	

3te *Reihe der Vergleichungen.*

	o	L	L	L
117 und 124	14,90	— 0,00135	— 0,00150	+ 0,00037
118 — 123	14,88	— 0,00165		
119 — 122	13,04	— 0,00103	— 0,00134	+ 0,00051
120 — 121	13,50	— 0,00165		
125 — 132	18,44	— 0,00165	— 0,00166	+ 0,00021
126 — 131	18,51	— 0,00167		
127 — 130	20,15	— 0,00095	— 0,00119	+ 0,00068
128 — 129	20,19	— 0,00143		
133 — 140	15,58	— 0,00220	— 0,00216	— 0,00029
134 — 139	15,58	— 0,00212		
135 — 138	15,51	— 0,00195	— 0,00210	— 0,00023
136 — 137	15,52	— 0,00225		
141 — 152	16,39	— 0,00198	— 0,00223	— 0,00036
142 — 151	16,80	— 0,00247		
143 — 150	16,55	— 0,00190	— 0,00200	— 0,00013
144 — 149	16,45	— 0,00210		
145 — 148	16,04	— 0,00210	— 0,00205	— 0,00018
146 — 147	15,97	— 0,00200		
153 — 160	16,97	— 0,00215	— 0,00216	— 0,00029
154 — 159	16,95	— 0,00218		
155 — 158	16,85	— 0,00172	— 0,00214	— 0,00027
156 — 157	16,83	— 0,00255		
Mittel	16,44	....	— 0,00187	

Man sieht hieraus, dafs dieselben äufseren Umstände, welche bei der *ersten* Reihe der Vergleichungen vorhanden waren, oder ähnlich vortheilhafte, schon durch ein zusammengehöriges Paar von Vergleichungen vor einer Umwendung, und ein eben solches nach derselben, Copien verheifsen, welche bis auf zwei Zehntausentel einer Linie sicher sind; wenigstens kommt

Digitized by Google

ein Fehler von dieser Gröfse in den 14 Resultaten dieser Art nicht vor und nur 4 derselben irren mehr als ein Zehntausentel einer Linie von dem Mittel aus allen ab. Die *zweite* Reihe bietet etwas gröfsere Abweichungen dar, die bis auf 0',00032 steigen und 8 Mal unter 15 über ein Zehntausentel gehen; ich glaube, dafs der Nachtheil, in welchem sie, vergleichungsweise mit der ersten Reihe, ist, nicht sowohl gröfserer Unbeständigkeit der Wärme, als dem zu niedrigen Grade derselben, welcher das Fett an den Bahnen der Schlitten der Mikrometer zum Erstarren gebracht und daher die Sicherheit der Bewegungen beeinträchtigt hat, zugeschrieben werden mufs, weshalb es rathsam erscheint, Vergleichungen von Copien, in der Folge, nur in gröfserer Wärme vorzunehmen. Die *dritte* Reihe endlich (bei welcher von der 117ten bis zur 140sten Vergleichung die Copie, von der 141sten bis zur 160sten das Original auf der Seite des Ofens lag), zeigt, unter 11 Abweichungen von dem Mittel, eine, welche 0',00068 beträgt; keine welche bis auf 0',0001 herabkäme. Ich zweifle daher nicht, dafs man nur in dem Falle, dafs man die Sicherheit der Copien auf ein Tausentel einer Linie beschränken, dennoch aber diese Copien durch die *vier* immer nothwendigen Vergleichungen, und nicht durch das arithmetische Mittel einer fortgesetzten Reihe derselben, erlangen will, die Herbeiführung vortheilhafter äufserer Umstände vernachlässigen darf.

§. 21.

Verfahren bei den Vergleichungen einer Copie und ihre Berechnungsart.

Ich setze voraus, dafs der Apparat sich in einem Zimmer befinde, welches keine *andere* Anwendung hat, also vor und während der Vergleichungen verschlossen werden kann; dafs er ohne Verbindung mit dem Fufsboden aufgestellt sei und dafs die Lage und Beschaffenheit des Zimmers das schnelle Eindringen äufserer Änderungen der Wärme verhindere.

Das Original des Preufsischen Längenmaafses kann fortwährend auf dem Apparate liegen bleiben; eine vorhandene, vollständige Bedeckung des Apparates schützt ihn und das Maafs vor Staub. Am Abend vor der Vergleichung einer Copie wird auch diese aufgelegt und centrirt, auch nachgesehen, ob die Centrirung des Originals noch nahe genug richtig ist; auf jeden der Stäbe wird ein Thermometer gelegt; dann wird das Ganze mit

Digitized by Google

dem Kasten von Holz überdeckt, und bleibt in diesem Zustande bis zur Vergleichung am nächsten Tage.

Die Vergleichung hat den Verlauf, den folgendes, aus No. 11. und 12. meines im vorigen §. mitgetheilten Verzeichnisses, entlehntes Beispiel deutlich macht:

1837 *Nov.* 23. 7^h 45′

	Mikrom. I	Wasserw.	Mikrom. II	Wasserw.	Thermometer I	Thermometer II	
	p		*p*		°		
Original	81,685	— 2,4	81,765	— 2,2	8,0	°	Beobachter auf der einen Seite des Apparats
Copie	81,585	— 1,7	81,88	+ 4,2		8,1	
Copie	81,585	— 0,3	81,88	+ 1,0		8,1	
Original	81,685	— 4,0	81,765	+ 5,0	8,0		
Original	81,68	+ 2,1	81,765	+ 4,2	8,0		Beobachter auf der anderen Seite des Apparats.
Copie	81,595	+ 3,0	81,87	— 3,3		8,15	
Copie	81,595	+ 2,5	81,87	— 1,8		8,15	
Original	81,685	+ 6,1	81,76	— 3,0	8,06		

Darauf werden beide Stäbe *umgewandt*, indem vorher nur die äufseren der sie haltenden Seitenschrauben gelöset und nachher wieder *schwach* angezogen werden. Nach mehreren Stunden, vielleicht am nächsten Tage, macht man die die vorigen ergänzenden Vergleichungen; als Beispiele also No. 13. und 14. des Verzeichnisses:

1837 *Nov.* 23. 20^h 45′

	Mikrom. I	Wasserw.	Mikrom. II	Wasserw.	Thermometer I	Thermometer II	
	p		*p*		°		
Original	81,625	+ 1,5	81,795	+ 1,8	8,0	°	Beobachter auf der einen Seite des Apparats
Copie	81,54	— 8,0	81,895	+ 2,0		8,1	
Copie	81,535	+ 5,2	81,895	+ 1,8		8,1	
Original	81,64	— 5,6	81,785	— 1,8	8,0		
Original	81,64	— 3,4	81,785	— 1,8	8,0		Beobachter auf der anderen Seite des Apparats.
Copie	81,545	— 0,2	81,89	— 4,0		8,15	
Copie	81,545	+ 2,0	81,885	+ 1,2		8,2	
Original	81,645	— 4,6	81,78	— 4,0	8,05		

Die Schrauben der Mikrometer sind immer in der Richtung gedrehet, in welcher die Zahlen ihrer Trommeln fortgehen, immer auf das nächste

Digitized by Google

ganze oder halbe Hundertel der Theilung auf den Trommeln. Ich bemerke hierbei, dafs wenn man eins der Mikrometer eingestellt hat, und dann das vordere zur Berührung bringt, jenes seine Stellung jedesmal verändert; dieses rührt von dem kleinen Drucke her, welchen das zweite Mikrometer gegen den Stab äufsert, und erfordert also, dafs man, ehe man die Mikrometer einstellt, *beide* zur Berührung bringe. Die Columnen für die Angaben der Wasserwagen enthalten die Unterschiede der auf beiden Seiten des Nullpunkts abgelesenen Theile der Scalen, also Entfernungen ihrer Blasen von der Mitte, in *halben* Theilen ausgedrückt. — Die Verwandlung der unmittelbaren Angaben der Mikrometerschrauben und der Wasserwagen, in Preufsische Linien, erhält man durch die in der III. Beilage enthaltenen, beiden ersten Tafeln; die Angaben der Thermometer werden auf wahre Grade der hunderttheiligen Scale reducirt, indem man die in der dritten Tafel gegebenen Verbesserungen hinzusetzt. Hierdurch erhält man, in dem zum Beispiele gewählten Falle:

für die erste Auflegung der Stäbe:

Wärme	Mikrometer I		Mikrometer II		Summe	Copie = Original
°	L	L	L	L	L	
7,90	0,2135.3 — 1.5	0,2133.8	0,2241.4 — 1.2	0,2240.2	0,4374.0	
7,84	2010.1 — 1.1	2009.0	2355.6 + 2.3	2387.9	4396.6	L — 0,00210
7,84	2010.1 — 0.2	2009.9	2385.6 + 0.5	2386.1	4396.0	
7,90	2135.3 — 2.6	2132.7	2241.4 + 2.7	2244.1	4376.8	
7,90	2129.0 + 1.3	2130.3	2241.4 + 2.3	2243.7	4374.0	
7,89	2022.5 + 1.9	2024.4	2373.1 — 1.8	2371.3	4195.7	— 0,00226
7,89	2022.5 + 1.6	2024.1	2373.1 — 1.0	2372.1	4396.2	
7,96	2135.3 + 3.9	2139.2	2235.1 — 1.6	2233.5	4372.7	

für die Umwendung der Stäbe:

7,90	0,2060.0 + 1.0	0,2061.0	0,2279.1 + 1.0	0,2280.1	0,4341.1	
7,84	1954.3 — 5.1	2049.2	2404.5 + 1.1	2405.6	4354.8	— 0,00150
7,84	1948.1 + 3.3	2051.4	2404.5 + 1.0	2405.5	4356.9	
7,90	2078.7 — 3.6	2075.1	2266.6 — 1.0	2265.6	4340.7	
7,90	2078.7 — 2.2	2076.5	2266.6 — 1.0	2265.6	4142.1	
7,89	1960.5 — 0.1	1960.4	2398.2 — 2.1	2396.1	4356.5	— 0,00142
7,94	1960.5 + 1.3	1961.8	2391.9 + 0.6	2392.5	4354.3	
7,95	2085.0 — 2.9	2082.1	2260.3 — 2.1	2258.2	4340.3	

Digitized by Google

Das Mittel aus den vier Zahlen der letzten Columne, ergiebt, frei von der Voraussetzung der genauen Centrirung der Stäbe:

Copie = Original — $0^{L},00182$. Wärme $7^{\circ},90$.

Für die Wärme = $7^{\circ},90$ ergiebt die vierte Tafel der Beilage III. die *scheinbare* Länge des Originals = 3 Fuſs — $0^{L},03654$. Man hat also die Länge der Copie in derselben Wärme = 3 Fuſs — $0^{L},03836$. Insofern man es bei ihrer einmaligen Vergleichung bewenden läſst, hat das was über die vierte Decimalstelle der Angabe ihrer Länge hinausgeht, ein sehr kleines Gewicht, was man dadurch andeuten kann, daſs man die *nächste* Einheit dieser Decimalstelle annimmt. Der Stab erhielte also, wenn er eine der §. 17. beschriebenen Copien wäre, die Aufschrift:

> 1837. *Dieser Stab, in der Wärme von* $7^{\circ},90$ *des hunderttheiligen Thermometers, in der Axe seiner cylindrischen Enden gemessen, ist* 0,0384 *Linien kürzer als* 3 *Preuſsische Fuſse.*

Will man aus dieser Aufschrift erkennen, wie lang die Copie in ihrer Normalwärme, *unter der Voraussetzung* ist, daſs ihre Änderungen durch die Wärme, denen des Originals vollkommen gleich seien, so hat man (16,25 — 7,90) $0^{L},004375$ = $0^{L},0365$ hinzuzufügen, wodurch man 3 Fuſs — $0^{L},0019$ erhält. Ob der Besitzer dieser Copie, diese Voraussetzung gelten lassen will, muſs ihm selbst überlassen bleiben.

Die äuſserste Einfachheit und Leichtigkeit des sehr genauen Copirens der Preuſsischen Maaſseinheit, welche ich jetzt, sowohl den Messungen, als auch ihrer Berechnung nach, vollständig erläutert habe, läſst mich hoffen, daſs richtiges Maaſs, so wie man es für wissenschaftliche Anwendungen verlangt, in der Folge weit leichter zu erlangen sein wird, als es bisher zu erlangen war. Indessen muſs ich noch sagen, nach welchen Elementen die Tafeln der Beilage III. berechnet worden sind. Die Formeln wonach die *erste*, die Verwandlung der Angaben der Mikrometer in Preuſsische Linien ergebende Tafel, berechnet worden ist, habe ich im 19ten §. gegeben. Die *zweite* Tafel setzt voraus, daſs die Wasserwage des Mikrometers I. um 19,8, des Mikrometers II. um 23,68 *halbe* Theile der Scale, ihren Stand verändert, wenn die Mikrometerschraube um $0^{R},01$ = $0^{L},001269$ gedrehet wird; diese Bestimmung ist aus häufig wiederholten Versuchen hervorgegangen.

Digitized by Google

Die *dritte*, die Berichtigung der Thermometer enthaltende Tafel, beruhet auf einer sorgfältigen Untersuchung derselben und einer genauen, im Decbr. 1837 vorgenommenen Bestimmung ihrer Eispunkte. Ich zweifle nicht, dafs ihre Angaben zu dieser Zeit, bis auf etwa ein Hundertel eines Grades richtig gewesen sind; ich vermuthe auch, dafs sie sich ziemlich richtig erhalten werden, indem ich vermieden habe, die Thermometer, seit der Zeit ihrer Verfertigung, im Sommer 1835, beträchtlichen Wärmeveränderungen auszusetzen, welche, nach bekannten Erfahrungen, oft plötzliche Änderungen des Standes hervorbringen. Diese Änderungen, in sofern sie mit der Zeit fortschreiten, pflegen, innerhalb eines Jahres nach der Verfertigung von Thermometern, ihr Maximum zu erreichen: die Untersuchung, worauf die Tafel beruhet, ist aber länger als zwei Jahre nach der Verfertigung vorgenommen.

Die *vierte* Tafel enthält die *scheinbare* Länge des Originalmaafses, für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers: ich habe sie von 0 bis 25° fortgesetzt, wünsche aber, zufolge der im vorigen §. angeführten Erfahrung, dafs man die Vergleichung von Copien, bei den niedrigeren Wärmegraden, vielleicht zwischen 0 und 5°, vermeide. Unter *scheinbarer* Länge des Originalmaafses verstehe ich die Länge, welche sich bei den Messungen durch den zum Copiren dienenden Apparat zeigt; sie ist dadurch von der wahren Länge verschieden, dafs die Berührungen, worauf die Messungen beruhen, durch Kugelflächen, nicht durch Punkte, bewirkt werden und die berührten Endflächen nicht senkrecht auf der Axe des Stabes stehende Ebenen sind. Die im 8ten §. gegebene Formel für die aus dieser Ursache entstehende scheinbare Verlängerung, erfordert die Kenntnifs der Halbmesser der Kugelflächen; ich habe diese, durch das im 8ten §. angegebene Verfahren, sehr genau bestimmen können und für das Mikrometer I. $5^{L},887$, für II. $5^{L},841$ gefunden, statt welcher beiden Zahlen man, ohne dadurch einen merklichen Fehler zu begehen, *eine*, nämlich $5^{L},86$ anwenden kann. Dann ergiebt die Formel

für die Endfläche I $= 0^{L},000467 + 0^{L},000009 = 0^{L},000476$
— — II $= 0,000119 + 0,000003 = 0,000122,$

also im Ganzen 0,000598 Pariser Linien, oder 0,000619 Preufsische. Hierdurch erhält man die *scheinbare* Länge des Preufsischen Originalmaafses, in seiner Normalwärme (§. 16.):

Digitized by Google

$$= 3 \text{ Fuſs} - 0^{L},00063 + 0^{L},00062 = 3 \text{ Fuſs} - 0^{L},00001$$

und in der Wärme von t Graden des hunderttheiligen Thermometers (§. 11.):

$$= 3 \text{ Fuſs} - 0^{L},00001 + (t - 16^{\circ},25)\, 0^{L},004375.$$

Nach dieser Formel ist die vierte Tafel berechnet.

Die *scheinbare* Länge der verglichenen Copie wird ihrer wahren Länge gleich angenommen. Es würde jedenfalls nicht ausführbar sein, dieselbe mühsame Untersuchung, welche im 8ten §. zur Kenntniſs der Beschaffenheit der Endflächen des Originals geführt hat, für jede Copie durchzuführen; damit aber aus ihrer Unterlassung nicht Unsicherheit entstehe, war es nöthig, Mittel zu ergreifen, welche verbürgen, daſs die Endflächen derselben senkrecht auf ihrer Axe stehende Ebenen sind. Dergleichen Mittel hat Herr *Baumann*, wie ich schon im 17ten §. gesagt habe, wirklich ergriffen, und ich habe darüber nur noch hinzuzusetzen, daſs sie den beabsichtigten Erfolg mit mehr als erforderlicher Sicherheit hervorbringen.

Digitized by Google

Beilage I.

Einfluſs der Schwere auf die Figur eines, auf zwei Punkten von gleicher Höhe aufliegenden Stabes.

1.

Durch die *Mécanique analytique* ist bekannt, daſs die Figur des Gleichgewichts des Stabes das Kennzeichen hat, daſs willkürliche, jedoch mit dem Zusammenhange seiner Theile vereinbare, unendlich kleine Variationen ihrer Coordinaten, jede in die auf ihre Richtung projicirten, an den durch die Coordinaten bestimmten Punkten wirkenden Kräfte multiplicirt, eine *verschwindende* Summe haben. Die wirkende Kraft ist ursprünglich die Schwere; ihr widersetzt sich aber die Elasticität des Stabes; beides zusammengenommen, bringt eine Änderung der Figur des Stabes hervor, welche, nach der *Lagrange*'schen Methode, unter den Voraussetzungen untersucht werden soll, daſs er ursprünglich gerade sei und daſs seine Mittellinie ihre Länge nicht ändere. Die letztere dieser Voraussetzungen fordert, daſs der Stab, in seinem geraden Zustande, durch eine horizontale, durch seine Mittellinie gelegte Ebene, in zwei, ihrer Figur, Masse und Spannkraft nach symmetrische Hälften geschnitten werden kann.

Bezeichnet man die wagerechte Coordinate eines Punktes der Mittellinie des Stabes durch x, die lothrechte durch y, und nimmt man y nach Oben positiv, nach Unten negativ, so ist die Summe der Producte der Schwere und der in ihrer Richtung stattfindenden Variationen,

$$= -\int \mu \, ds \, \delta y,$$

wo μ die Masse einer Längeneinheit des Stabes und ds ein Element der Mittellinie bedeuten. Wenn der Winkel des Elements ds mit der Axe der x, durch ϕ bezeichnet, oder

Digitized by Google

$$ds \operatorname{Cos}\phi = dx, \quad ds \operatorname{Sin}\phi = dy$$

gesetzt wird, kann die Kraft, mit welcher der Stab sich seiner Krümmung widersetzt, als eine Kraft angesehen werden, welche den Winkel ϕ zu ändern strebt. Ist ihre Gröfse, an einem Hebelarme $= 1$ angebracht, $= E$ und das Differential der Richtung des Elements ds, in der Curve des Gleichgewichtes und in der variirten $d\phi$ und $d\phi + d\delta\phi$, so ist die Summe der Producte dieser Kraft und der auf ihre Richtung projicirten Variation der Coordinaten

$$= \int E d\delta\phi$$

Man hat also die Bedingung des Gleichgewichts des Stabes

$$0 = \int \{-\mu ds \delta y + E d\delta\phi\}.$$

Allein durch die Annahme, dafs seine Mittellinie ihre Länge nicht ändere, oder dafs

$$0 = \int \left\{ \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y \right\}$$

sei, werden δx und δy voneinander abhängig. Man kann sie aber ferner als unabhängig betrachten, indem man den letzten Ausdruck, unter dem Integralzeichen, mit einem unbestimmten Factor λ multiplicirt und das Product dem ersten Ausdrucke hinzufügt. Hierdurch erhält man die zu erfüllende Gleichung:

$$0 = \int \left\{ -\mu ds \delta y + E d\delta\phi + \lambda \frac{dx}{ds} d\delta x + \lambda \frac{dy}{ds} d\delta y \right\}.$$

Es ist aber

$$\delta\phi = \frac{dx\, d\delta y - dy\, d\delta x}{ds^2}$$

und wenn man dieses anwendet und die Gleichung integrirt, erhält man, statt ihrer:

$$0 = E\delta\phi + \delta x \left\{ \frac{dy\, dE}{ds^2} + \lambda \frac{dx}{ds} \right\} - \delta y \left\{ \frac{dx\, dE}{ds^2} - \lambda \frac{dy}{ds} \right\}$$
$$- \int \delta x \left\{ d \cdot \frac{dy\, dE}{ds^2} + d.\lambda \frac{dx}{ds} \right\} + \int \delta y \left\{ d \cdot \frac{dx\, dE}{ds^2} - d.\lambda \frac{dy}{ds} - \mu ds \right\} \ldots\ldots [1]$$

Digitized by Google

2.

Für alle freien, d.h. nicht mit den Unterlagen in Berührung befindlichen Theile des Stabes müssen δx und δy willkürlich bleiben, also die unter den Integralzeichen befindlichen

$$d \cdot \frac{dy\, dE}{ds^2} + d \cdot \lambda \frac{dx}{ds}$$

und $$d \cdot \frac{dx\, dE}{ds^2} - d \cdot \lambda \frac{dy}{ds} - \mu\, ds$$

verschwinden. Man erhält hierdurch, wenn c und c' willkürliche Constanten bedeuten,

$$c = \frac{dy\, dE}{ds^2} + \lambda \frac{dx}{ds}$$

$$c' = \frac{dx\, dE}{ds^2} - \lambda \frac{dy}{ds} - \mu s$$

und es folgt daraus:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= c \frac{dx}{ds} - (c' + \mu s) \frac{dy}{ds} \\ \frac{dE}{ds} &= c \frac{dy}{ds} + (c' + \mu s) \frac{dx}{ds} \end{aligned}\right\} \dots\dots [2]$$

Die aufser dem Integralzeichen befindlichen Theile der Gleichung [1] werden, durch die Substitution dieser Ausdrücke

$$o = E\delta\phi + c\delta x - (c' + \mu s)\delta y \dots\dots [3]$$

welcher Gleichung für den Anfang und das Ende des Stabes entsprochen werden mufs, indem diese Punkte von den Unterlagen frei sind. Da $\delta\phi$, δx, δy willkürlich bleiben müssen, erhält man $E = o$, $c = o$, $c' = -\mu s_{,}$, wo unter $s_{,}$ die beiden, dem Anfange und dem Ende des Stabes zugehörigen Werthe von s zu verstehen sind. Bezeichnet man die Länge des Stabes durch $2l$, und zählt man s von seiner Mitte an, negativ nach dem Anfangspunkte, positiv nach dem Endpunkte, so wird $s_{,} = -l$ und $= l$ und man erhält, zur Bestimmung der Figur des Stabes zwischen seinen Ruhepunkten und Endpunkten, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} dE &= \mu(s + l)\, dx \\ dE &= \mu(s - l)\, dx \end{aligned}\right\} \dots\dots [4]$$

Digitized by Google

Die auf den Unterlagen befindlichen Punkte des Stabes können nur Verschiebungen in der krummen Linie selbst, welche der Stab bildet, erfahren, oder die ihnen zugehörigen Variationen von x und y müssen der Bedingung

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

entsprechen. Hierdurch verwandeln sich die aufser den Integralzeichen befindlichen Theile der Gleichung [1] in:

$$o = E\,\delta\phi + \delta x \,.\, \lambda \frac{ds}{dx}.$$

Diese Gleichung fordert, da δx willkürlich bleibt, dafs λ an den Ruhepunkten verschwinde; ferner dafs $E\delta\phi$ für beide Ruhepunkte gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sei. Da, der ersten der Gleichungen [2] zufolge, an Punkten, an welchen $\lambda = o$ ist,

$$c = (c' + \mu s)\frac{dy}{dx}$$

sein mufs, so ist für die Werthe von s und $\frac{dy}{dx}$ welche den Ruhepunkten entsprechen und welche ich durch $-\sigma$ und σ' und durch $\operatorname{tang}\phi'$ und $\operatorname{tang}\phi''$ bezeichnen werde,

$$c = (c' - \mu\sigma)\operatorname{tang}\phi'$$
$$c = (c' + \mu\sigma')\operatorname{tang}\phi''$$

oder

$$c\,(\operatorname{tgs}\phi'' - \operatorname{tgs}\phi') = \quad \mu\,(\sigma + \sigma')\operatorname{tgs}\phi' \operatorname{tgs}\phi''$$
$$c'(\operatorname{tgs}\phi'' - \operatorname{tgs}\phi') = -\mu\,(\sigma \operatorname{tgs}\phi' + \sigma' \operatorname{tgs}\phi'').$$

Man erhält, indem man diese Ausdrücke der Constanten in die zweite der Gleichungen [2] setzt, die Differentialgleichung der Figur des Stabes zwischen seinen beiden Ruhepunkten:

$$dE = \frac{\mu}{\operatorname{tgs}\phi'' - \operatorname{tgs}\phi'}\left\{(\sigma+\sigma')\operatorname{tgs}\phi' \operatorname{tgs}\phi'' dy + (s-\sigma')\operatorname{tgs}\phi'' dx - (s+\sigma)\operatorname{tgs}\phi' dx\right\} [5]$$

Digitized by Google

3.

Um die Gleichungen [4] und [5] integriren zu können, mufs man wissen, auf welche Art E von der Krümmung des Stabes abhängt. Es ist bekanntlich dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional, oder wenn dieser durch ϱ, und eine Constante durch ν bezeichnet wird, ist

$$E = \frac{\nu}{\varrho}$$

und, wenn man für ϱ seinen Ausdruck schreibt,

$$E = -\frac{\nu\, dx\, d^2 y}{ds^3}.$$

Aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit [4] und [5] geht hervor, dafs y eine Gröfse von der Ordnung von $\frac{\mu}{\nu}$ ist; wenn die Figur des Stabes sich sehr wenig von der geraden entfernt, also y sehr klein ist, ist auch diese Gröfse sehr klein. Wenn man, um die Integrationen abzukürzen, $s = x$, $ds = dx$ setzt, so begeht man dadurch einen Fehler von der Ordnung von $\frac{\mu}{\nu} yy$, oder von der dritten Ordnung, welche für die aufzulösende Aufgabe unmerklich ist. Man kann also

$$E = -\nu \frac{d^2 y}{dx^2}$$

und statt der Gleichungen [4]

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{\mu}{\nu}(x+l) \quad \text{und} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{\mu}{\nu}(x-l)$$

annehmen. Die Integrationen ergeben:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\mu}{2\nu}(x \pm l)^2 + h$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu}{6\nu}(x \pm l)^3 + hx + h'$$

$$y = -\frac{\mu}{24\nu}(x \pm l)^4 + \frac{h}{2}x^2 + h'x + h''.$$

Zur Bestimmung der Constanten h, h', h'' dienen die Bedingungen, dafs $\frac{d^2 y}{dx^2}$ für beide Endpunkte des Stabes verschwindet; dafs $\frac{dy}{dx}$ für seine beiden Ruhepunkte resp. $=$ tang ϕ' und $=$ tang ϕ'' ist, und dafs y, für die-

Digitized by Google

selben Punkte einen gegebenen Werth erhält. Setzt man, um zu vereinfachen, gleich Anfangs voraus, was bei jeder Anwendung stattfinden wird, nämlich daſs die Mitte des Stabes sich in der Mitte zwischen beiden Ruhepunkten befinde, bezeichnet man die Entfernungen dieser Punkte von den Enden des Stabes durch a, und zählt man die y von der horizontalen, beide Ruhepunkte verbindenden Linie an, so wird x, für den Anfangspunkt des Stabes $= -l$, für den Endpunkt $= l$, für den ersten Ruhepunkt $= -(l-a)$, für den zweiten $= l-a$, und die Bestimmung der Constanten geht aus den Gleichungen:

$$0 = h \qquad\qquad 0 = h$$

$$\operatorname{tgs}\phi' = -\frac{\mu}{6\nu}a^3 - h(l-a) + h' \qquad \operatorname{tgs}\phi'' = \frac{\mu}{6\nu}a^3 + h(l-a) + h'$$

$$0 = -\frac{\mu}{24\nu}a^4 + \frac{h}{2}(l-a)^2 - h'(l-a) + h'' \quad 0 = -\frac{\mu}{24\nu}a^4 + \frac{h}{2}(l-a)^2 + h'(l-a) + h''$$

hervor, welche

$$h = 0 \qquad\qquad h = 0$$

$$h' = \operatorname{tgs}\phi' + \frac{\mu}{6\nu}a^3 \qquad h' = \operatorname{tgs}\phi'' - \frac{\mu}{6\nu}a^3$$

$$h'' = \operatorname{tgs}\phi'(l-a) + \frac{\mu}{24\nu}a^3\{4l-3a\} \qquad h'' = -\operatorname{tgs}\phi''(l-a) + \frac{\mu}{24\nu}a^3(4l-3a)$$

ergeben. Man hat also für die beiden Theile des Stabes, welche auſserhalb der Ruhepunkte liegen,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\mu}{2\nu}(x+l)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}\left\{(x+l)^3 - a^3\right\} + \operatorname{tgs}\phi' \\ y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{(x+l)^4 - a^4\right\} + \frac{\mu}{6\nu}a^3(x+l-a) + \operatorname{tgs}\phi'(x+l-a) \end{aligned}\right\} \dots\dots [6]$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\mu}{2\nu}(x-l)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}\left\{(x-l)^3 + a^3\right\} + \operatorname{tgs}\phi'' \\ y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{(x-l)^4 - a^4\right\} + \frac{\mu}{6\nu}a^3(x-l+a) + \operatorname{tgs}\phi''(x-l+a) \end{aligned}\right\} \dots\dots [7]$$

Digitized by Google

Die Differentialgleichung für den zwischen den Ruhepunkten liegenden Theil des Stabes [5] verwandelt sich, wenn man Gröfsen der dritten Ordnung vernachlässigt und $\sigma = \sigma' = l - a$ setzt, in

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-\mu}{\nu(\operatorname{tgs}\phi''-\operatorname{tgs}\phi')}\left\{(x-l+a)\operatorname{tgs}\phi''-(x+l-a)\operatorname{tgs}\phi'\right\}$$

und ihre Integrale sind

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\mu}{2\nu(\operatorname{tgs}\phi''-\operatorname{tgs}\phi')}\left\{(x-l+a)^2\operatorname{tgs}\phi''-(x+l-a)^2\operatorname{tgs}\phi'\right\}+h$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\mu}{6\nu(\operatorname{tgs}\phi''-\operatorname{tgs}\phi')}\left\{(x-l+a)^3\operatorname{tgs}\phi''-(x+l-a)^3\operatorname{tgs}\phi'\right\}+hx+h'$$

$$y = \frac{-\mu}{24\nu(\operatorname{tgs}\phi''-\operatorname{tgs}\phi')}\left\{(x-l+a)^4\operatorname{tgs}\phi''-(x+l-a)^4\operatorname{tgs}\phi'\right\}+\frac{h}{2}x^2+h'x+h''$$

Zur Bestimmung der Constanten sind die Bedingungen vorhanden, dafs an beiden Ruhepunkten, oder für $x = -(l-a)$ und $x = l-a$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{dy}{dx}$ die Werthe erhalten, welche [6] und [7] dafür geben, und dafs y verschwinde. Die erste dieser Bedingungen ergiebt die Gleichungen:

$$-\frac{\mu}{2\nu}a^2 = \frac{-2\mu}{\nu(\operatorname{tgs}\phi''-\operatorname{tgs}\phi')}(l-a)^2\operatorname{tgs}\phi''+h = \frac{2\mu}{\nu(\operatorname{tgs}\phi''-\operatorname{tgs}\phi')}(l-a)^2\operatorname{tgs}\phi'+h$$

und zeigt dadurch, dafs

$$\operatorname{tgs}\phi'' = -\operatorname{tgs}\phi'$$
$$h = \frac{\mu}{2\nu}\left\{2(l-a)^2-a^2\right\}$$

sind, die zweite ergiebt die Gleichungen:

$$\operatorname{tgs}\phi' = \frac{2\mu}{3\nu}(l-a)^3-h(l-a)+h' = \frac{2\mu}{3\nu}(l-a)^3-h(l-a)-h'$$

also

$$h' = 0$$
$$\operatorname{tgs}\phi' = -\frac{\mu}{6\nu}\left\{2(l-a)^2-3a^2\right\}\{l-a\} = -\operatorname{tgs}\phi'';$$

die dritte endlich ergiebt:

$$0 = -\frac{\mu}{3\nu}(l-a)^4+\frac{h}{2}(l-a)^2-h'(l-a)+h''$$
$$= -\frac{\mu}{3\nu}(l-a)^4+\frac{h}{2}(l-a)^2+h'(l-a)+h''$$

Digitized by Google

und es folgt daraus

$$h'' = -\frac{\mu}{12\nu}\left\{2(l-a)^2 - 3a^2\right\}(l-a)^2.$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke der Constanten findet man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\mu}{2\nu}\left\{xx - l(l-2a)\right\}\\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}\,x\left\{xx - 3l(l-2a)\right\}\\ y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{xx-(l-a)^2\right\}\left\{xx+(l-a)^2-6l(l-2a)\right\}\end{aligned}\right\}\text{............}[8]$$

Indem man den gefundenen Ausdruck von $\text{tgs}\,\phi' = -\text{tgs}\,\phi''$ auch anwendet, die Formeln [6] und [7] von ϕ' und ϕ'' zu befreien, werden ihre beiden letzten:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}\left\{(x+l)^3 + l(2ll-6al+3aa)\right\}\\ y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{(x+l)^4-a^4\right\} - \frac{\mu}{6\nu}(x+l-a)\,l(2ll-6al+3aa)\end{aligned}\right\}\text{............}[6^*]$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu}{6\nu}\left\{(x-l)^3 - l(2ll-6al+3aa)\right\}\\ y &= -\frac{\mu}{24\nu}\left\{(x-l)^4-a^4\right\} + \frac{\mu}{6\nu}(x-l+a)\,l(2ll-6al+3aa)\end{aligned}\right\}\text{............}[7^*]$$

4.

Die Gröfse der Entfernung der Mittellinie des Stabes von der geraden Linie ist, wie hieraus hervorgeht, der Gröfse $\frac{\mu}{\nu}$ proportional. Ehe man diese Untersuchung anwenden kann, mufs diese Gröfse für den Fall der Anwendung bestimmt werden. Ich werde zeigen, wie sie mit der Beschaffenheit des Stabes und der Spannkraft seiner Materie zusammenhängt.

Das Gewicht μ jeder Längeneinheit des Stabes ist

$$= f \,.\, \Delta \,.\, k,$$

wo f die Fläche seines Queerschnittes, Δ das specifische Gewicht seiner Materie, und k das Gewicht einer Raumeseinheit des dichtesten Wassers

Digitized by Google

bezeichnen. Die Gröfse ν hängt von der Spannkraft der Materie des Stabes und der Figur seines Queerschnittes ab. Zum Maafse der ersteren haben die Physiker die Verkürzung der Längeneinheit jeder Dimension eines Körpers gewählt, welche durch den allseitigen Druck einer Atmosphäre erzeugt wird. *Poisson* hat gezeigt, dafs jede Zusammendrückung eines Körpers in einer Richtung, welche seine Abmessung in dieser Richtung, in dem Verhältnisse $1:1-\alpha$ verändert, eine Veränderung der beiden anderen Abmessungen, in dem Verhältnisse $1:1+\frac{1}{4}\alpha$ zur Folge hat. Die Verkürzung durch den allseitigen Druck der Atmosphäre ist also nur halb so grofs, als die aus ihrem einseitigen Drucke hervorgehende, oder das von jenem hergenommene Maafs mufs verdoppelt werden, wenn es Grundlage von Untersuchungen der Folgen eines einseitigen Druckes werden soll. Ich werde es durch β bezeichnen.

Nimmt man die Atmosphäre, worauf dieses Maafs sich bezieht, so schwer an, wie sie bei dem Barometerstande $= 0{,}76$ Mét. $= 336\text{'}{,}902$ ist, auch das specifische Gewicht des Quecksilbers, welches bei diesem Barometerstande in der Wärme des schmelzenden Eises vorausgesetzt ist, $= 13{,}596$, so wird das auf jede Flächeneinheit, wofür ich die Pariser Quadratlinie annehme, drückende Gewicht, welches die Verkürzung 2β erzeugt

$$= 336{,}902 \,.\, 13{,}596 \,.\, k = 4580{,}5\, k.$$

Bezeichnet man ferner, wie oben, den Krümmungshalbmesser der Mittellinie des Stabes, durch ϱ, so ist die Ausdehnung eines von dem Mittelpunkte der Krümmung $\varrho + u$ entfernten Längenelementes des Stabes, dessen Länge, in seinem geraden Zustande $= ds$ ist:

$$= ds\left\{1+\frac{u}{\varrho}\right\}.$$

Unter der Annahme, dafs die Verkürzung, welche ein Druck erzeugt, seiner Stärke proportional ist, kann man die Kraft bestimmen, welche die eben angegebene Veränderung hervorbringt. Sie folgt aus der Proportion:

$$2\beta : 4580{,}5\, k = -\frac{u}{\varrho} : P$$

oder sie ist:

$$P = \frac{-2290{,}25\, k \,.\, u}{\beta\varrho}.$$

R

Digitized by Google

Denkt man sich den Stab durch zwei unendlich wenig voneinander entfernte, auf seine Oberfläche normale Ebenen geschnitten, so daſs sie im geraden Zustande des Stabes parallel sind, im gekrümmten aber sich im Mittelpunkte der Krümmung durchschneiden, bezeichnet man die Breite des Stabes in der Entfernung u von seiner Mittellinie durch ϕu und nimmt man an, daſs diese Mittellinie, von dem einen Zustande zu dem anderen, ihre Ausdehnung nicht ändere, so ist die Kraft, welche in dem Mittelpunkte der Krümmung angebracht werden muſs um das Auseinandergehen der Ebene zu verhindern, das von dem gröſsten negativen bis zu dem gröſsten positiven Werthe von u genommene Integral

$$-\frac{1}{\varrho}\int P\phi u \,.\, u\,du,$$

oder, wenn sie in der Entfernung 1 von der Mittellinie des Stabes angebracht wird

$$-\int P\phi u \,.\, u\,du = \frac{2290{,}25\,k}{\beta\varrho}\int\phi u \,.\, uu\,du.$$

Dieses ist also der Ausdruck der vorher durch E bezeichneten Kraft durch die Elemente wovon sie abhängt. Indem sie $=\frac{\nu}{\rho}$ gesetzt worden ist, hat man

$$\nu = \frac{2290{,}25\,.\,k}{\beta}\int\phi u \,.\, uu\,du$$

und das in den Formeln für die Figur, welche der Stab durch die Schwere annimmt, vorkommende

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{f\,.\,\Delta\,.\,\beta}{2290{,}25\int\phi u\,.\,uu\,du} \quad \text{.......} [9]$$

Wenn der Stab ein Parallelepipedum von der Dicke $2d$ und der Breite b ist, so ist

$$f = 2db;\quad \phi u = b;\quad \int\phi u\, uu\,du = \frac{2}{3}\,bd^3$$

und

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{3\Delta\beta}{2290{,}25\,.\,dd} \quad \text{.......} [10]$$

Wenn er cylindrisch, vom Halbmesser d ist, ist

$$f = \pi dd;\quad \phi u = 2\sqrt{(dd-uu)};\quad \int\phi u\,.\,uu\,du = \frac{1}{4}\,\pi d^4$$

und

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{4\Delta\beta}{2290{,}25\,.\,dd} \quad \text{.......} [11]$$

Digitized by Google

Für einen Hohl-Cylinder, vom äufseren Halbmesser d und inneren d' ist endlich

$$f = \pi(dd - d'd'); \quad \int \phi u\, uu\, du = \frac{\pi}{4}\{d^4 - d'^4\}$$

und

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{4\Delta\beta}{2280{,}25\,\{dd + d'd'\}} \quad \text{.......................................} [12]$$

5.

Ich werde zuerst den Einflufs aufsuchen, welchen die Schwere auf die Entfernung der Endflächen eines Stabes von der Länge $2l$ hat, welcher auf zwei Punkten aufliegt, deren Entfernung von seinem Ende $= a$ ist. Er ist offenbar das über die ganze Länge des Stabes ausgedehnte Integral von $dx - ds$, oder

$$= \int dx \left\{1 - \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\right\}$$

und mit hinreichender Annäherung,

$$= -\int \frac{dy^2}{2dx}.$$

Durch die Ausdrücke von $\frac{dy}{dx}$, welche durch die Formeln [6*], [8], [7*] gegeben sind, wird dieser Einflufs die Summe dreier Integrale, deren jedes sich über eine der Abtheilungen des Stabes erstreckt, nämlich:

$$= -\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \int_{-l}^{-l+a} \left[(x+l)^3 + l(2ll - 6al + 3aa)\right]^2 dx$$

$$-\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \int_{-l+a}^{l-a} \left[x^3 - 3l(l-2a)x\right]^2 dx$$

$$-\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \int_{l-a}^{l} \left[(x-l)^3 - l(2ll - 6al + 3aa)\right]^2 dx$$

und nach vollständiger Entwickelung

$$= -\frac{1}{360}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 l^7 \left\{\frac{136}{7} - 96\left(\frac{a}{l}\right) + 120\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 40\left(\frac{a}{l}\right)^3 - 120\left(\frac{a}{l}\right)^4 + 42\left(\frac{a}{l}\right)^5 + \left(\frac{a}{l}\right)^6\right\} [13]$$

Digitized by Google

Der Werth von $\frac{a}{l}$ für welchen dieser Ausdruck ein Minimum wird, findet sich durch die Auflösung der Gleichung:

$$0 = -96 + 240\left(\frac{a}{l}\right) + 120\left(\frac{a}{l}\right)^2 - 480\left(\frac{a}{l}\right)^3 + 210\left(\frac{a}{l}\right)^4 - 6\left(\frac{a}{l}\right)^5 \text{.........} [14]$$

und ist $= 0{,}44062$. Der Stab verkürzt sich also am wenigsten, wenn man ihn 0,22031 seiner ganzen Länge, von den Endpunkten entfernt, auflegt. Dann beträgt die Verkürzung

$$-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 l^7 \cdot 0{,}0000836,$$

während sie, bei der Auflegung an den Endpunkten selbst, also für $a = 0$,

$$-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 l^7 \cdot 0{,}0539683$$

beträgt.

Ich werde diese Formeln auf die Toise und auf das neue Original des Preufsischen Längenmaafses anwenden. Die Copie der ersteren, welche ich zu den Pendelversuchen u. s. w. angewandt habe, hat eine Dicke von 4,2 Linien, oder d ist $= 2{,}1$; ihr specifisches Gewicht Δ werde ich $= 7{,}821$ annehmen, und den Werth von β, zufolge der vortrefflichen Versuche *Lagerhielms*, $=$ einem Viermillionentel; l ist $= 432$. Hiernach ergiebt die Formel [10]:

$$\log \frac{\mu}{\nu} = 0{,}76399 - 10$$

und die Entfernung der Endflächen vermindert sich, durch die vortheilhafteste Auflegung um $0^L{,}000079$, durch die Auflegung an den Enden aber um $0^L{,}05111$. In diesem letzten Falle entfernt sich die Toise, in ihrer Mitte, von der geraden, durch ihre Enden gelegten Linie, um mehr als 4^L; man wird aber ohne Zweifel nie eine so unzweckmäfsige Anwendung derselben versuchen, wie die sein würde, die die Auflegung eines so langen und dünnen Stabes an seinen Enden erforderte.

Für das neue Original des Preufsischen Längenmaafses ist $d = 4{,}5$, $l = 208{,}7$ und die dem Stahl zukommenden Werthe von Δ und β können den für das Eisen angenommenen gleich geschätzt werden. Hierdurch erhält man

$$\log \frac{\mu}{\nu} = 0{,}10200 - 10$$

Digitized by Google

und die Verminderung der Entfernung der Endflächen beträgt, selbst bei der Auflegung an den Enden, nur 0,0000145.

6.

Ferner werde ich den Einfluſs der Schwere, auf die Entfernung zweier, auf der höchstliegenden Fläche eines Stabes verzeichneten Punkte aufsuchen. Er besteht offenbar aus zwei Theilen, nämlich der Verkürzung, welche die Entfernung der den Punkten entsprechenden Punkte der Mittellinie des Stabes erfährt, und der Veränderung, welche daraus hervorgeht, daſs die Krümmung derselben die Entfernungen auf der Seite ihres Mittelpunktes verkürzt und auf der ihm entgegengesetzten Seite verlängert. Wenn die beiden Punkte gleich weit von der Mitte des Stabes entfernt sind, und diese Entfernung durch $l - a'$ bezeichnet wird, ist der *erste* Theil

$$= -\int_{-l+a'}^{l-a'} \frac{dy^2}{2dx}$$

und man findet, unter der Voraussetzung, daſs $a' > a$ ist, oder daſs die auf dem Stabe verzeichneten Punkte *auſserhalb* der Ruhepunkte liegen, durch die Ausführung der Integrationen des vorigen Art., diesen Theil

$$= -\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \Big\{ \frac{2}{7}(a^7 - a'^7) + l(2ll-6al+3aa)(a^4 - a'^4) + 2ll(2ll-6al+3aa)^2(a-a')$$
$$+ \frac{2}{7}(l-a)^7 - \frac{12}{5}\, l(l-2a)(l-a)^5 + 6ll(l-2a)^2(l-a)^3 \Big\}.$$

Der *zweite* Theil ist offenbar

$$= -d(\phi_1 - \phi_0),$$

wo d die Entfernung der Punkte von der Mittellinie des Stabes bezeichnet, und ϕ_0 und ϕ_1 die zu dem Anfangspunkte und dem Endpunkte gehörigen Werthe von ϕ bedeuten. Da die Formeln [6*] und [7*]

$$\text{tgs}\,\phi_0 = \frac{-\mu}{6\nu}\left\{a'^3 + l(2ll-6al+3aa)\right\}$$

$$\text{tgs}\,\phi_1 = \frac{\mu}{6\nu}\left\{a'^3 + l(2ll-6al+3aa)\right\}$$

Digitized by Google

ergeben, und die Tangenten von ϕ_0 und ϕ_1 mit den Bögen verwechselt werden können, ist der zweite Theil

$$= -\frac{\mu d}{3\nu}\left\{a'^3 + l(2ll-6al+3aa)\right\}$$

und beide vereinigt ergeben die ganze Veränderung der Entfernung:

$$= -\frac{\mu d}{3\nu}\left\{a'^3+l(2ll-6al+3aa)\right\} - \frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\left\{\frac{2}{7}(a^7-a'^7)+l(2ll-6al+3aa)(a^4-a'^4)\right.$$
$$\left.+2ll(2ll-6al+3aa)^2(a-a')+\frac{2}{7}(l-a)^7-\frac{12}{5}l(l-2a)(l-a)^6+6ll(l-2a)^2(l-a)^5\right\} [15]$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes verschwindet für die Annahme

$$\frac{a}{l} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1-\left(\frac{a'}{l}\right)^3\right)};$$

das zweite ist für alle Stäbe, welche sich zur Erklärung eines, auf die hier betrachtete Art verzeichneten Maafses eignen, sehr klein, weshalb es dann immer einen, sich dem eben angegebenen Werthe nähernden Werth von a giebt, für welchen das Maafs genau so lang erscheint, als es erscheinen würde, wenn der dasselbe tragende Stab auf einer Ebene läge. Dieser Werth geht für einen gegebenen Stab, oder für gegebene Werthe von b und a', aus der Auflösung der Gleichung hervor, welche man erhält wenn man den Ausdruck [15] $= 0$ setzt. Bringt man die beiden Unterlagen des Stabes an den so gefundenen Punkten an, so hat seine Biegsamkeit keinen Einflufs auf das durch ihn erklärte Maafs.

Wenn aber der Fall, welchen die Formel [15] voraussetzt, nicht der vorhandene ist, also die auf dem Stabe verzeichneten Punkte *innerhalb* der Ruhepunkte liegen, kann man diese Formel nicht länger anwenden. Dann ist der erste Theil der für diesen Fall gehörigen Formel,

$$= -\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\left\{\frac{2}{7}(l-a')^7 - \frac{12}{5}l(l-2a)(l-a')^6 + 6ll(l-2a)^2(l-a')^5\right\}$$

und der zweite Theil

$$= -\frac{\mu d}{3\nu}\left\{(l-a')^3 - 3l(l-2a)(l-a')\right\}$$

Beide zusammen ergeben die Veränderung der Entfernung:

$$= \frac{\mu d}{3\nu}\left\{(l-a')^3 - 3l(l-2a)\,(l-a')\right\}$$

$$-\frac{1}{72}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\left\{\frac{2}{7}\,(l-a')^7 - \frac{12}{5}\,l(l-2a)\,(l-a')^5 + 6ll(l-2a)^2\,(l-a')^3\right\}\ldots\ldots[16]$$

Auch diese Formeln werde ich auf zwei vorhandene Fälle anwenden. Einer von ihnen ist das im Jahre 1816 verfertigte Original des Preufsischen Maafses. Für den Stab von Eisen, auf welchen es verzeichnet ist, ist $l = 212{,}0$, $d = 2{,}45$; die Entfernung der das Maafs bestimmenden Striche von den Enden des Stabes, oder a', ist $= 3{,}5$. Wendet man die schon angewandten Werthe von Δ und β wieder an, so wird

$$\log\frac{\mu}{\nu} = 0{,}63009 - 10;$$

bringt man die beiden Unterlagen des Stabes genau unter den Endpunkten des darauf verzeichneten Maafses an, oder setzt man $a = a' = 3{,}5$, so ergiebt die Formel [15] die hieraus entstehende Verkürzung des Maafses $= 0{,}^{L}006482$. Der Stab entfernt sich dann, in seiner Mitte, $0{,}^{L}168$ von der geraden Linie. Soll das Maafs die Länge, welche es hat, indem der Stab auf einer Ebene liegt, durch seine Auflegung auf zwei Unterlagen nicht verändern, so müssen diese 0,2113 der Länge des Stabes von seinen Enden entfernt sein.

Der andere Fall, auf welchen ich die Formeln [15] und [16] anwenden werde, wird durch die auf die Oberfläche einer Röhre aufgetragene Scale gegeben, welche Hr. *Baily* für die *Astronomical Society* hat verfertigen lassen. Die Röhre ist 63 Englische Zolle lang und ihr äufserer und innerer Durchmesser sind 1,12 und 0,74 Zoll; die Endpunkte einer auf die Röhre aufgetragene Entfernung von 3 Engl. Fufsen sind 13,5 Zoll von ihren Enden entfernt. Die von Hrn. *Baily* als normal gewählte Auflegungsart auf zwei Punkten, setzt diese ein Viertel der Länge = 15,75 Zoll, von den Enden entfernt voraus; er hat aber auch Versuche über die Veränderungen angestellt, welche die drei Fufs erfuhren, wenn die Ruhepunkte 31, 17,75, 13,75, 1 Zoll von den Enden der Röhre entfernt wurden. Verwandelt man das Englische Maafs in Pariser Linien, so erhält man

$$l = 354{,}7, \quad a' = 152{,}0, \quad d = 6{,}31, \quad d' = 4{,}17$$

Digitized by Google

und *a*, für die verschiedenen, nach und nach angewandten Auflegungsarten,

349,05; 199,86; 177,34; 154,82; 11,26,

wovon der mittlere Werth der *normale* ist.

Den Werth von β haben *Savart* und *Chadni* (*) für Messing, woraus die Röhre gemacht ist,

$$= \frac{1}{2123000}$$

gefunden, welche Bestimmung aber von der Unbestimmtheit der Mischungsverhältnisse des Messings nicht frei sein kann. Nimmt man sie an und setzt man $\Delta = 8{,}45$, so erhält man, durch die Formel [12]:

$$\log \frac{\mu}{\nu} = 0{,}08464 - 10.$$

Die vier ersten Versuche sind in dem Falle, welchen die Formel [15] voraussetzt, die fünfte aber ist in dem von [16] vorausgesetzten. Das erste Glied beider Formeln hat den Werth:

$$+0^L{,}010500;\quad +0^L{,}003980;\quad +0^L{,}001953;\quad -0^L{,}000358;\quad -0^L{,}016184;$$

das zweite ist weit kleiner und beträgt nur

$$-0^L{,}000067;\quad -0^L{,}000006;\quad -0^L{,}000001;\quad -0^L{,}000001;\quad -0^L{,}000123.$$

Beide Glieder zusammengenommen ergeben die ganze Veränderung des Maafses von drei Fufs, in den verschiedenen Auflegungsarten,

$$+0^L{,}010433;\quad +0^L{,}003974;\quad +0^L{,}001952;\quad -0^L{,}000359;\quad -0^L{,}016307$$

oder, von der *normalen* angerechnet,

$$+0^L{,}008481;\quad +0^L{,}002022;\quad -0^L{,}002311;\quad -0^L{,}018259.$$

Hr. *Baily* hat diese Veränderungen beobachtet, und, auf Pariser Linien reducirt, folgende Werthe derselben erhalten:

$$+0^L{,}00709;\quad +0^L{,}00169;\quad -0^L{,}00266;\quad -0^L{,}01947.$$

(*) *Frankenheim.* Die Lehre von der Cohäsion. Breslau 1835. S. 256.

Digitized by Google

Beilage II.

Tafel, zur Verwandlung der Angaben der Mikrometer des allgemeinen Meſsapparats in Pariser Linien.

	Mikrom. I		Mikrom. II	
a	*L*		*L*	
15,6	— 0,5384.3	122.9	— 0,5388.1	122.4
15,7	— 0,5261.4	123.1	— 0,5265.7	122.4
15,8	— 0,5138.3	122.7	— 0,5143.3	122.6
15,9	— 0,5015.6	121.9	— 0,5020.7	122.5
16,0	— 0,4893.7	121.3	— 0,4898.2	122.0
16,1	— 0,4772.4	121.6	— 0,4776.2	121.7
16,2	— 0,4650.8	122.3	— 0,4654.5	122.2
16,3	— 0,4528.5	122.9	— 0,4532.3	123.2
16,4	— 0,4405.6	122.8	— 0,4409.1	123.3
16,5	— 0,4282.8	122.7	— 0,4285.8	122.8
16,6	— 0,4160.1	122.8	— 0,4163.0	122.3
16,7	— 0,4037.3	123.0	— 0,4040.7	122.4
16,8	— 0,3914.3	122.7	— 0,3918.3	122.6
16,9	— 0,3791.6	121.9	— 0,3795.7	122.4
17,0	— 0,3669.7	121.3	— 0,3673.3	122.0
17,1	— 0,3548.4	121.5	— 0,3551.3	121.8
17,2	— 0,3426.9	122.3	— 0,3429.5	122.1
17,3	— 0,3304.6	122.9	— 0,3307.4	123.2
17,4	— 0,3181.7	122.8	— 0,3184.2	123.2
17,5	— 0,3058.9	122.7	— 0,3061.0	122.8
17,6	— 0,2936.2	122.7	— 0,2938.2	122.4
17,7	— 0,2813.5	123.0	— 0,2815.8	122.3
17,8	— 0,2690.5	122.7	— 0,2693.5	122.6
17,9	— 0,2567.8	121.9	— 0,2570.9	122.4
18,0	— 0,2445.9	121.2	— 0,2448.5	121.9
18,1	— 0,2324.7	121.5	— 0,2326.6	121.8
18,2	— 0,2203.2	122.3	— 0,2204.8	122.1
18,3	— 0,2080.9	122.8	— 0,2082.7	123.2
18,4	— 0,1958.1	122.8	— 0,1959.5	123.2
18,5	— 0,1835.3	122.7	— 0,1836.3	122.8
18,6	— 0,1712.6		— 0,1713.5	

	Mikrom. I		Mikrom. II	
a	*L*		*L*	
18,6	— 0,1712.6	122.7	— 0,1713.5	122.3
18,7	— 0,1589.9	123.0	— 0,1591.2	122.3
18,8	— 0,1466.9	122.6	— 0,1468.9	122.5
18,9	— 0,1344.3	121.9	— 0,1346.4	122.4
19,0	— 0,1222.4	121.2	— 0,1224.0	122.0
19,1	— 0,1101.2	121.5	— 0,1102.0	121.7
19,2	— 0,0979.7	122.2	— 0,0980.3	122.1
19,3	— 0,0857.5	122.8	— 0,0858.2	123.1
19,4	— 0,0734.7	122.8	— 0,0735.1	123.2
19,5	— 0,0611.9	122.6	— 0,0611.9	122.8
19,6	— 0,0489.3	122.8	— 0,0489.1	122.3
19,7	— 0,0366.5	122.9	— 0,0366.8	122.3
19,8	— 0,0243.6	122.6	— 0,0244.5	122.5
19,9	— 0,0121.0	121.8	— 0,0122.0	122.4
20,0	+ 0,0000.8	121.3	+ 0,0000.4	121.9
20,1	+ 0,0122.1	121.4	+ 0,0122.3	121.7
20,2	+ 0,0243.5	122.2	+ 0,0244.0	122.1
20,3	+ 0,0365.7	122.8	+ 0,0366.1	123.1
20,4	+ 0,0488.5	122.8	+ 0,0489.2	123.2
20,5	+ 0,0611.3	122.6	+ 0,0612.4	122.7
20,6	+ 0,0733.9	122.7	+ 0,0735.1	122.3
20,7	+ 0,0856.6	121.9	+ 0,0857.4	122.3
20,8	+ 0,0979.5	122.5	+ 0,0979.7	122.5
20,9	+ 0,1102.0	121.9	+ 0,1102.2	122.3
21,0	+ 0,1223.9	121.2	+ 0,1224.5	121.9
21,1	+ 0,1345.1	121.4	+ 0,1346.4	121.7
21,2	+ 0,1466.5	122.1	+ 0,1468.1	122.1
21,3	+ 0,1588.6	122.8	+ 0,1590.2	123.0
21,4	+ 0,1711.4	122.7	+ 0,1713.2	123.2
21,5	+ 0,1834.1	122.6	+ 0,1836.4	122.7
21,6	+ 0,1956.7		+ 0,1959.1	

Digitized by Google

Beilage III.

Tafeln zur Berechnung der Vergleichungen von Copien des Preufsischen Längenmaafses.

***Erste Tafel,** zur Verwandlung der Angaben der Mikrometerschrauben in Preufs. Linien.*

R	I L	II L
81,10	0,1394.6	0,1395.1
11	1407.2	1407.9
12	1419.8	1420.7
13	1432.5	1433.5
14	1445.1	1446.3
15	1457.7	1459.0
16	1470.4	1471.9
17	1483.1	1484.6
18	1495.8	1497.3
19	1508.5	1510.0
81,20	1521.2	1522.7
21	1534.0	1535.4
22	1546.8	1548.1
23	1559.7	1560.8
24	1572.6	1573.5
25	1585.5	1586.1
26	1598.4	1598.8
27	1611.3	1611.5
28	1624.2	1624.2
29	1637.1	1636.8
81,30	1650.1	1649.4
31	1663.0	1662.1
32	1675.9	1674.7
33	1688.8	1687.4
34	1701.7	1700.0
35	1714.6	1712.7
36	1727.5	1725.4
37	1740.3	1738.0
38	1753.1	1750.7
39	1765.9	1763.3
81,40	1778.7	1776.0
41	1791.4	1788.7
42	1804.1	1801.4
43	1816.7	1814.1
44	1829.3	1826.8
45	1841.9	1839.6
46	1854.5	1852.3
47	1867.1	1865.0
48	1879.6	1877.8
49	1892.1	1890.6
81,50	1904.6	1903.4

R	I L	II L
81,50	0,1904.6	0,1903.4
51	1917.1	1916.3
52	1929.5	1929.1
53	1941.9	1942.0
54	1954.3	1954.8
55	1966.7	1967.7
56	1979.1	1980.5
57	1991.5	1993.4
58	2003.9	2006.2
59	2016.3	2019.1
81,60	2028.7	2031.9
61	2041.2	2044.7
62	2053.7	2057.5
63	2066.2	2070.2
64	2078.7	2083.0
65	2091.2	2095.7
66	2103.8	2108.5
67	2116.4	2121.2
68	2129.0	2133.9
69	2141.6	2146.6
81,70	2154.2	2159.3
71	2166.9	2172.0
72	2179.7	2184.7
73	2192.5	2197.3
74	2205.3	2209.9
75	2218.1	2222.5
76	2230.9	2235.1
77	2243.7	2247.7
78	2256.6	2260.3
79	2269.5	2272.9
81,80	2282.4	2285.4
81	2295.3	2298.0
82	2308.2	2310.6
83	2321.1	2323.1
84	2334.0	2335.6
85	2346.9	2348.1
86	2359.8	2360.6
87	2372.7	2373.1
88	2385.6	2385.6
89	2398.4	2398.2
81,90	2411.2	2410.8

R	I L	II L
81,90	0,2411.2	0,2410.8
91	2424.0	2423.4
92	2436.7	2436.0
93	2449.4	2448.6
94	2462.1	2461.2
95	2474.8	2473.8
96	2487.5	2486.4
97	2500.1	2499.0
98	2512.7	2511.7
99	2525.3	2524.4
82,00	2537.9	2537.1
01	2550.5	2549.8
02	2563.1	2562.5
03	2575.6	2575.2
04	2588.1	2587.9
05	2600.6	2600.6
06	2613.2	2613.3
07	2625.7	2626.0
08	2638.2	2638.7
09	2650.7	2651.4
82,10	2663.2	2664.2
11	2675.8	2676.9
12	2688.4	2689.6
13	2701.0	2702.4
14	2713.6	2715.2
15	2726.3	2728.0
16	2739.0	2740.8
17	2751.7	2753.5
18	2764.4	2766.3
19	2777.1	2779,0
82,20	2789.8	2791.8
21	2802.7	2804.5
22	2815.5	2817.2
23	2828.3	2829.9
24	2841.2	2842.6
25	2854.1	2855.2
26	2867.0	2867.9
27	2879.9	2880.6
28	2892.8	2893.2
29	2905.7	2905.8
82,30	2918.7	2918.4

R	I L	II L
82,30	0,2918.7	0,2918.4
31	2931.6	2931.1
32	2944.5	2943.7
33	2957.4	2956.4
34	2970.3	2969.1
35	2983.2	2981.7
36	2996.1	2994.4
37	3008.9	3007.0
38	3021.8	3019.7
39	3034.6	3032.3
82,40	3047.3	3045.0
41	3060.0	3057.7
42	3072.7	3070.4
43	3085.3	3083.1
44	3097.9	3095.8
45	3110.5	3108.6
46	3123.1	3121.3
47	3135.7	3134.0
48	3148.2	3146.8
49	3160.7	3159.6
82,50	3173.2	3172.4

Digitized by Google

Zweite Tafel, zur Verwandlung der Angaben der Wasserwage in Preuſs. Linien.

	I	II		I	II
	L	L		L	L
0,0	0,0000.0	0,0000.0	5,0	0,0003.2	0,0002.7
0,1	0.1	0.1	5,1	3.3	2.7
0,2	0.1	0.1	5,2	3.3	2.8
0,3	0.2	0.2	5,3	3.4	2.8
0,4	0.3	0.2	5,4	3.5	2.9
0,5	0.3	0.3	5,5	3.5	2.9
0,6	0.4	0.3	5,6	3.6	3.0
0,7	0.4	0.4	5,7	3.6	3.0
0,8	0.5	0.4	5,8	3.7	3.1
0,9	0.6	0.5	5,9	3.8	3.2
1,0	0.6	0.5	6,0	3.8	3.2
1,1	0.7	0.6	6,1	3.9	3.3
1,2	0.8	0.6	6,2	4.0	3.3
1,3	0.8	0.7	6,3	4.0	3.4
1,4	0.9	0.8	6,4	4.1	3.4
1,5	1.0	0.8	6,5	4.2	3.5
1,6	1.0	0.9	6,6	4.2	3.5
1,7	1.1	0.9	6,7	4.3	3.6
1,8	1.2	1.0	6,8	4.4	3.6
1,9	1.2	1.0	6,9	4.4	3.7
2,0	1.3	1.1	7,0	4.5	3.8
2,1	1.3	1.1	7,1	4.5	3.8
2,2	1.4	1.2	7,2	4.6	3.9
2,3	1.5	1.2	7,3	4.7	3.9
2,4	1.5	1.3	7,4	4.7	4.0
2,5	1.6	1.3	7,5	4.8	4.0
2,6	1.7	1.4	7,6	4.9	4.1
2,7	1.7	1.4	7,7	4.9	4.1
2,8	1.8	1.5	7,8	5.0	4.2
2,9	1.9	1.6	7,9	5.1	4.2
3,0	1.9	1.6	8,0	5.1	4.3
3,1	2.0	1.7	8,1	5.2	4.3
3,2	2.0	1.7	8,2	5.2	4.4
3,3	2.1	1.8	8,3	5.3	4.4
3,4	2.2	1.8	8,4	5.4	4.5
3,5	2.2	1.9	8,5	5.4	4.6
3,6	2.3	1.9	8,6	5.5	4.6
3,7	2.4	2.0	8,7	5.6	4.7
3,8	2.4	2.0	8,8	5.6	4.7
3,9	2.5	2.1	8,9	5.7	4.8
4,0	2.6	2.1	9,0	5.8	4.8
4,1	2.6	2.2	9,1	5.8	4.9
4,2	2.7	2.3	9,2	5.9	4.9
4,3	2.8	2.3	9,3	6.0	5.0
4,4	2.8	2.4	9,4	6.0	5.0
4,5	2.9	2.4	9,5	6.1	5.1
4,6	2.9	2.5	9,6	6.1	5.1
4,7	3.0	2.5	9,7	6.2	5.2
4,8	3.1	2.6	9,8	6.3	5.3
4,9	3.1	2.6	9,9	6.3	5.3
5,0	3.2	2.7	10,0	6.4	5.4

Digitized by Google

Dritte Tafel.

Berichtigung der Angaben der Thermometer

°	I °	II °
0,0	— 0,05	— 0,14
1,0	— 0,06	— 0,16
2,0	— 0,06	— 0,17
3,0	— 0,07	— 0,19
4,0	— 0,08	— 0,20
5,0	— 0,09	— 0,22
6,0	— 0,09	— 0,23
7,0	— 0,10	— 0,25
8,0	— 0,10	— 0,26
9,0	— 0,10	— 0,26
10,0	— 0,11	— 0,27
11,0	— 0,11	— 0,28
12,0	— 0,12	— 0,29
13,0	— 0,12	— 0,30
14,0	— 0,13	— 0,31
15,0	— 0,14	— 0,32
16,0	— 0,15	— 0,32
17,0	— 0,16	— 0,32
18,0	— 0,17	— 0,32
19,0	— 0,18	— 0,32
20,0	— 0,18	— 0,32
21,0	— 0,19	— 0,32
22,0	— 0,19	— 0,32
23,0	— 0,20	— 0,32
24,0	— 0,20	— 0,32
25,0	— 0,20	— 0,32

Vierte Tafel.

Scheinbare Länge des Originals des Preuſs. Längenmaaſses

c °	3 Fuſs *L*
0,0	— 0,0711.0
1,0	— 0,0667.3
2,0	— 0,0623.5
3,0	— 0,0579.8
4,0	— 0,0536.0
5,0	— 0,0492.3
6,0	— 0,0448.5
7,0	— 0,0404.8
8,0	— 0,0361.0
9,0	— 0,0317.3
10,0	— 0,0273.5
11,0	— 0,0229.8
12,0	— 0,0186.0
13,0	— 0.0142.3
14,0	— 0,0098.5
15,0	— 0,0054.8
16,0	— 0,0011.0
17,0	+ 0,0032.7
18,0	+ 0,0076.5
19,0	+ 0,0120.2
20,0	+ 0,0164.0
21,0	+ 0,0207.7
22,0	+ 0,0251.5
23,0	+ 0,0295.2
24,0	+ 0,0339.0
25,0	+ 0,0382.7

c °	*L*
0,0	0,0000.0
0,1	0,0004.4
0,2	0,0008.8
0,3	0,0013.1
0,4	0,0017.5
0,5	0,0021.9
0,6	0,0026.3
0,7	0,0030.6
0,8	0,0035.0
0,9	0,0039.4

Digitized by Google

Amtlicher Anhang.

I.

Motive für den bei des Königs Majestät beantragten Erlafs, des unter dem 10ten März 1839 Allerhöchst vollzogenen Gesetzes über das Urmaafs des Preufsischen Staates.

Die Maafs- und Gewichts-Ordnung vom 16. Mai 1816 und die Anweisung zur Anfertigung der Probe-Maafse und Gewichte von demselben Tage schreiben vor, dafs

der Preufsische Fufs das Grundmaafs für sämmtliche Preufsischen Staaten sei, der 139,13 Linien des Pariser Fufses enthalte. Damit aber die Gröfse des Preufsischen Fufsmaafses unabhängig von jedem Maafse auf einem Urmaafse beruhe, welches zu allen Zeiten bei entstehenden Zweifeln wieder erlangt werden könne, so solle, nach Beendigung der Beobachtungen über die Sekunden-Pendellänge von Berlin, diese und ihr Verhältnifs zum Preufsischen Fufse öffentlich bekannt gemacht werden;

dafs

ein Probemaafs verfertigt und bei dem Ministerium der Finanzen und des Handels aufbewahrt werden soll, als einzig autorisirtes Maafs in

Digitized by Google

den Preufsischen Staaten. Zur Erhaltung der authentisch genauen Richtigkeit für alle folgende Zeiten wurde die Anfertigung eines zweiten, dritten und vierten Exemplars des Probemaafses und deren Niederlegung bei verschiedenen Behörden angeordnet, so wie eine wenigstens alle 10 Jahre vorzunehmende sachverständige Vergleichung dieser Probemaafse mit dem zuerst erwähnten Original.

Schon im Jahre 1821 hatte die Akademie der Wissenschaften das Erforderliche zu den Beobachtungen über die Sekunden-Pendellänge zu Berlin eingeleitet, und zu dem Ende den Professor Tralles nach London gesandt, um dort unter seinen Augen die dazu nöthigen Instrumente anfertigen zu lassen, auch solche an Ort und Stelle in Gebrauch und Untersuchung zu setzen, welche demnächst in Berlin demselben Beobachter dienen sollten, um hier die erforderlichen Versuche zur Bestimmung der absoluten, und auch gegen London relativen Sekunden-Pendellänge anzustellen.

Durch den in London erfolgten Tod des p. Tralles wurden diese Vorarbeiten unterbrochen.

Inzwischen hatte der Astronom Geheime Regierungsrath Bessel in Königsberg Vorrichtungen getroffen, durch welche er die Länge des einfachen Sekundenpendels für die Königsberger Sternwarte mit einem hohen Grade von Schärfe bestimmt hatte, worüber die Abhandlungen der Akademie zu Berlin für 1826 vollständige Auskunft geben. Es erschien daher angemessen, ihn hierher einzuladen, um unter Mitwirkung der mathematischen Klasse der Akademie, die Beobachtungen über die hiesige Sekunden-Pendellänge anzustellen und zu vollenden. Das Resultat ist in den Verhandlungen der Akademie vom Jahre 1835 enthalten.

Danach ward die von der Maafs- und Gewichts-Ordnung vorgeschriebene Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels in Berlin im Jahre 1835 an einem Punkte im Garten der Sternwarte unter der Polhöhe

Digitized by Google

52° 30′ 16″ und in der Höhe von 110,35 Preufsischen Fufsen über der Meeresfläche vorgenommen und hat, in Preufsischem Maafse ausgedrückt:

456,1626 Linien = 3 Fufs 2 Zoll 0,1626 Linien

betragen.

Bei Ausführung der vorgeschriebenen Vergleichung des Probemaafses mit seinen 3 Kopien kam das Verlangen anderer Staaten zur Sprache, einen mit dem Preufsischen ganz oder bis auf eine unerhebliche Kleinigkeit gleichen Etalon zu besitzen, zum Theil, um ihn bei sich gesetzlich zu machen; ein Verlangen, welches zur Verbreitung eines gleichen Maafssystems die gröfste Beachtung verdiente. Es ergaben sich indefs dabei Schwierigkeiten, zu deren Erläuterung Folgendes bemerkt werden mufs.

Das Urmaafs und seine Kopien besteht in vier Stäben von Eisen, deren jeder die Länge von 3 Preufsischen Fufsen darstellen soll. Diese vier Stäbe sind äufserlich einander fast gleich; der zum Urmaafse gewählte ist um 7 Linien länger als 3 Fufse, 14,6 Linien breit und 4,9 Linien dick. Sie geben 3 Preufsische Fufse, so wie auch die Abtheilung derselben in 36 Zolle und des letzten Zolles in 12 Linien durch Striche an, welche zwei, auf einer der breiteren Seiten der Stäbe, ihrer ganzen Länge nach in etwa 0,4 Linien Entfernung von einander gezogene Linien senkrecht durchschneiden. Diese Striche sind auf Silber eingeschnitten, und zwar für die Zolle auf Stifte dieses Metalls, welche in ganz durch das Eisen gehende Bohrlöcher getrieben sind, für die Linien auf eine eingelegte Platte; die Oberflächen des Silbers und des Eisens sind in eine Ebene geschliffen.

Die Bestimmung der äufseren Umstände, in welche das Urmaafs versetzt werden soll, damit die Entfernung seiner äufsersten Striche drei Preufsische Fufs sei, ist noch nicht gesetzlich erfolgt; die Punkte, die Striche zwischen welchen gemessen werden soll, die Wärme welche der Stab haben soll, und die Art, wie er bei der Messung auf zwei Punkte, oder auf eine

Digitized by Google

Fläche aufgelegt werden soll, sind nämlich nicht gesetzlich bestimmt. Hierzu tritt im Allgemeinen, dafs eine Kopie von einem so durch Striche bestimmten Urmaafse, weder ohne dessen Beschädigung abgenommen, noch mit der erforderlichen grofsen Genauigkeit und Sicherheit gefertigt werden kann, wie durch den Kontakt.

Um die Länge des Preufsischen Fufses von jeder Unbestimmtheit zu befreien, ist in den Jahren 1835 bis 1837 ein neues Urmaafs angefertigt worden, welches ihn durch die Entfernung der Endflächen eines Stabes von Stahl, von $\frac{3}{4}$ Zoll Breite und Dicke angiebt. Diese Endflächen sind aus einem harten und dauerhaften Material, nämlich Sapphir gemacht, wodurch man den Vortheil erlangt hat, das Urmaafs selbst dem Kopiren aussetzen zu können, ohne seine Veränderung im Laufe der Zeit fürchten zu dürfen. Eine Vorschrift über die Art, wie dieser Stab bei seiner Anwendung aufgelegt werden soll, ist unnöthig, indem der Einflufs, welchen eine Willkühr in der Wahl derselben auf die Entfernung seiner Endflächen, vorausgesetzt, dafs sie in seiner Achse gemessen wird, haben kann, als unmerklich anerkannt worden ist.

Die oben erwähnte Unsicherheit der Bestimmung des Preufsischen Fufses durch sein Probemaafs, hatte die Folge, dafs das neue Urmaafs nicht nach jenem, sondern nur nach der ihm zum Grunde liegenden Absicht, so wie das Gesetz vom 16. Mai 1816 sie ausspricht, bestimmt werden konnte. Der Preufsische Fufs ist also aufs Neue aus dem Französischen Fufse mit der möglichsten Genauigkeit abgeleitet worden, indem er gleich 139,13 Linien desselben angenommen ist. Seine Länge wird durch das erwähnte neue Urmaafs bestimmt werden, nämlich durch die Entfernung der Endflächen des oben beschriebenen Stabes, in seiner Achse und in der Wärme von 16,25 Graden des hunderttheiligen Thermometers gemessen, welche unter diesen Umständen 0,00063 Linien kürzer ist als drei Preufsische Fufse. Dieses Urmaafs der Preufsischen Längeneinheit ist geeignet, selbstständige Geltung

Digitized by Google

und unabhängig von ihrer früheren doppelten Erklärung durch den Ausdruck in Pariser Maafs zu erhalten.

Es sind Einrichtungen getroffen, welche die Erlangung von Kopien von drei Preufsischen Fufsen zur Folge haben werden. Eine authentische Kopie soll durch einen Stab, von weichem Stahl, von derselben Breite und Dicke welche das Urmaafs besitzt, welcher aber Endflächen von gehärtetem Stahl hat, gegeben werden. Die in Preufsischem Maafse ausgedrückte Entfernung dieser Endflächen von einander, in der Achse des Stabes gemessen, soll auf der Kopie selbst so verzeichnet werden, wie die Vergleichung mit dem Urmaafse sie, in der Wärme welche beide zur Zeit derselben besessen, ergeben hat. Diese Einrichtungen sind so angeordnet, dafs die Kopien eine Genauigkeit besitzen werden, welche über ein Tausendtheil einer Linie beträchtlich hinausgeht. Ihre Anfertigung wird unter Gewährleistung der Normal-Eichungs-Kommission geschehen.

Der Bericht des Astronomen Geheimen Regierungsraths Bessel über seine umfassenden Arbeiten zur Erreichung der Maafseinheit, die Beschreibung der dazu, so wie zur Vergleichung der Kopien mit dem Urmaafse angefertigten Apparate, befindet sich unter der Presse. Sie wird der gelehrten Welt die Genauigkeit der Ermittelungen verbürgen, und die Sicherheit der Anstalten zur Erlangung von Kopien, von welcher Astronomen des Auslandes im Interesse ihrer Regierungen sich schon hier persönlich überzeugt haben.

Schliefslich bleibt zu erwähnen, dafs die durch das Gesetz vom 16. Mai 1816 vorgeschriebene Vergleichung des Probemaafses mit seinen drei Kopien zwar im Jahre 1835 statt gefunden hat, dafs aber bei dem Mangel einer gesetzlichen Bestimmung der äufseren dabei zu beobachtenden Umstände, dabei von Voraussetzungen ausgegangen werden mufste.

Wenn aber angenommen wird, dafs die Entfernung der äufsersten Striche an den Punkten derselben, welche sich in der Mitte zwischen beiden,

Digitized by Google

der Länge der Stäbe nach gezogenen Linien befinden, gemessen werden soll, während die Wärme des Stabes dieselbe ist, in welcher das Urmaafs der Toise seine wahre Länge erhält, nämlich 16,25 Grad des hunderttheiligen Thermometers, so zeigt die im Jahr 1835 vorgenommene Vergleichung des Preufsischen Probemaafses mit der Toise, dafs der Preufsische Fufs, der Absicht, ihn = 139,13 Linien des Französischen Fufses zu machen, falls man sein Probemaafs auf eine Ebene legt, so nahe entspricht, dafs sich keine Abweichung von dieser Absicht angeben läfst, welche nicht weit innerhalb der Grenzen der, aus der willkührlich gelassenen Auflegungsart herrührenden Unbestimmtheit wäre. Die drei gesetzlichen Kopien haben sich dem Probemaafse gleichfalls innerhalb dieser Grenzen gleich gezeigt.

Diese Ermittelung hebt jedes Bedenken, welches dagegen obwalten konnte, das neugefertigte Urmaafs an die Stelle des früheren Probemaafses zu setzen.

Digitized by Google

Amtlicher Anhang.

II.

Gesetz über das Urmaafs des Preufsischen Staates im Verfolg des Gesetzes vom 16ten Mai 1816.

Wir Friedrich Wilhelm,

von Gottes Gnaden,

König von Preufsen etc.

Verordnen im Verfolg und zur weiteren Ausführung der Maafs- und Gewichts-Ordnung vom 16ten Mai 1816, wie folgt:

§. 1.

Als Urmaafs des Preufsischen Fufses ist dasjenige Exemplar anzusehen, welches im Jahre 1837 aufs Neue aus dem Französischen Fufse abgeleitet worden, indem er nach der gesetzlichen Vorschrift gleich 139,13 Linien desselben angenommen ist. Die Länge des Preufsischen Fufses wird durch dieses Urmaafs allein bestimmt, nämlich die Entfernung seiner Endflächen von Sapphir in seiner Achse und in der Wärme von 16,25 Graden des hunderttheiligen Thermometers gemessen, welche unter diesen Umständen 0,00063 Linien kürzer ist, als drei Preufsische Fufse. Diese Erklärung des Preufsischen Fufses ist die einzig authentische.

Digitized by Google

§. 2.

Dieses Urmaafs der Preufsischen Längeneinheit soll bei dem Ministerium des Handels niedergelegt sein.

§. 3.

Da die von der Maafs- und Gewichts-Ordnung vorgeschriebene Bestimmung der Länge des einfachen Sekunden-Pendels in Berlin erfolgt ist, und in Preufsischem Maafse 456,1626 Linien, gleich Drei Fufs Zwei Zoll 0,1626 Linien ergeben hat, so soll dadurch die Länge des Preufsischen Fufses, unabhängig von jedem anderen Urmaafse, für die Zukunft festgestellt erachtet werden.

§. 4.

In Folge dieser Bestimmungen wird die Vorschrift aufgehoben, wonach das frühere Probemaafs alle zehn Jahre mit seinen Kopien verglichen werden soll.

Urkundlich ist das gegenwärtige Gesetz von Uns eigenhändig vollzogen und mit Unserem Königlichen Insiegel bedruckt worden.

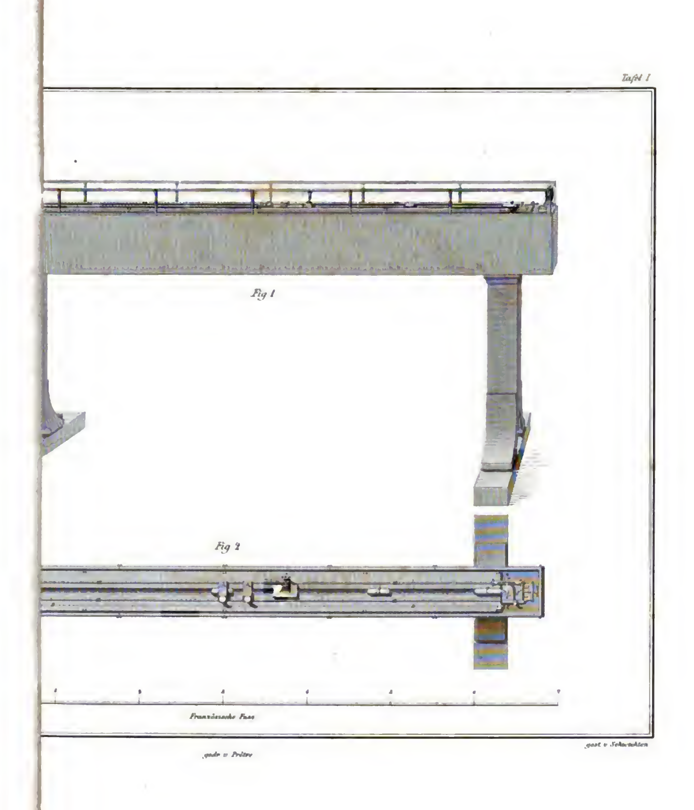
Gegeben: Berlin, den 10ten März 1839.

gez: Friedrich Wilhelm.

(L. S.)

contrasign: *Friedrich Wilhelm,* Kronprinz.
Frhr. *v. Altenstein, v. Kamptz, Mühler, v. Rochow, v. Nagler, v. Ladenberg,* Gr. *v. Alvensleben,* Frhr. *v. Werther, v. Rauch.*

Digitized by Google

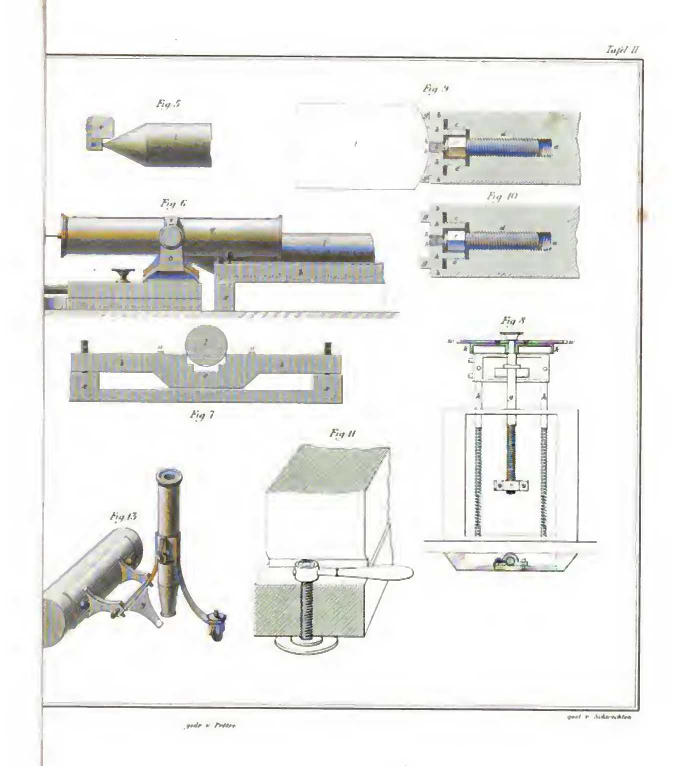


gez. v. Prître

gest. v. Schachten

Digitized by Google

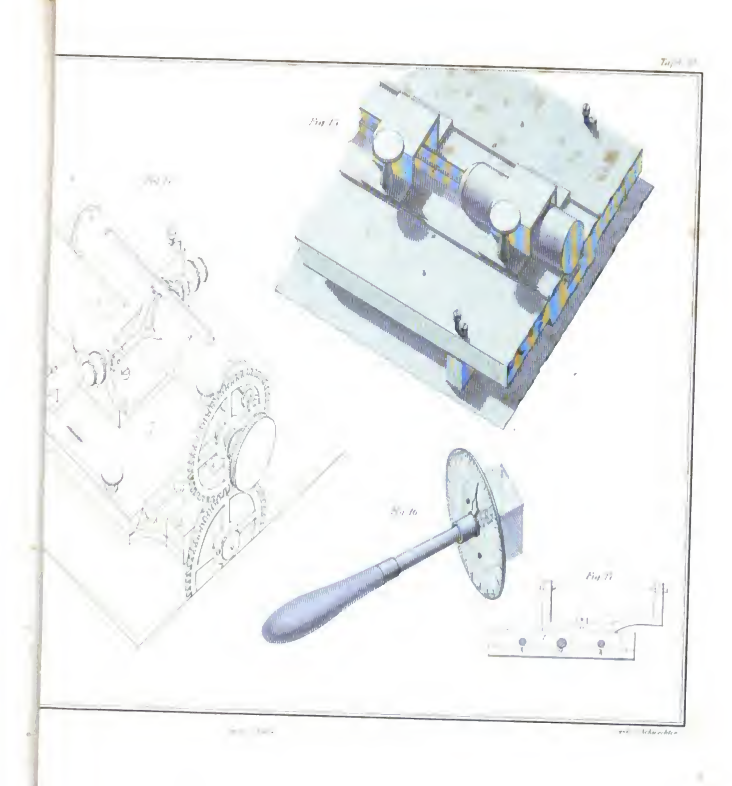
Digitized by Google

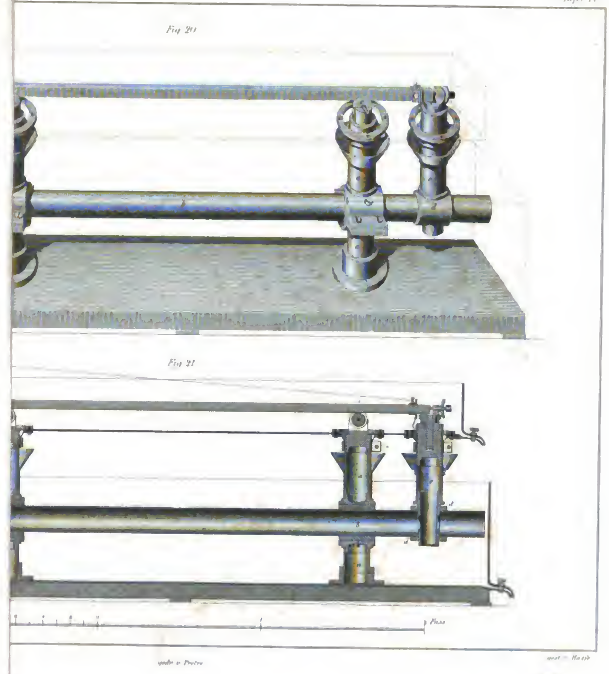


gez. v. Pettre   gest. v. Schoenchen

Digitized by Google

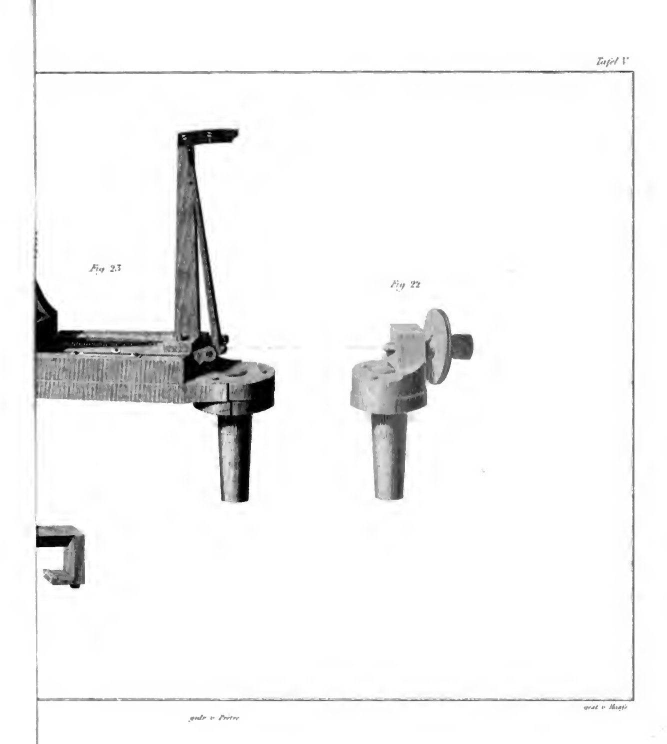
Digitized by Google


Digitized by Google



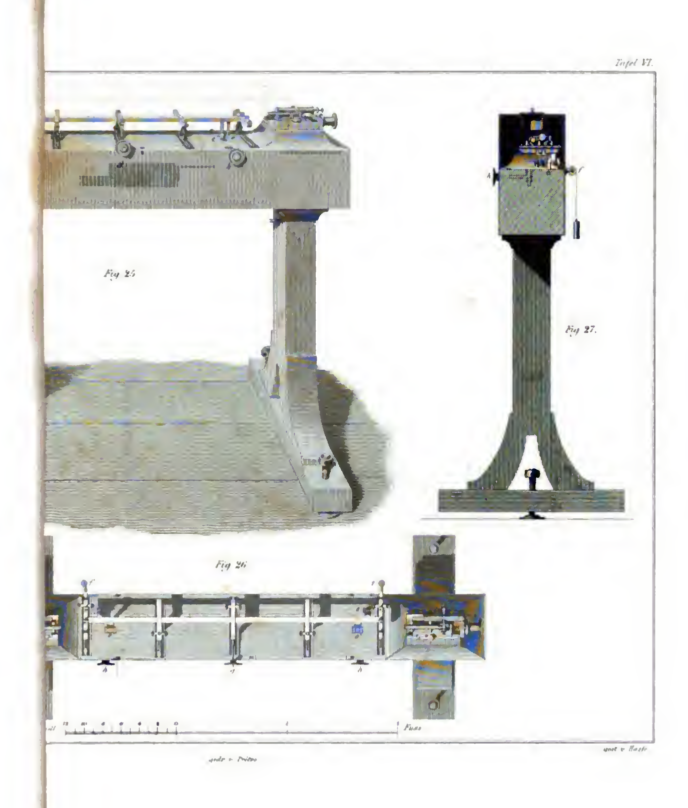
Digitized by Google

Digitized by Google



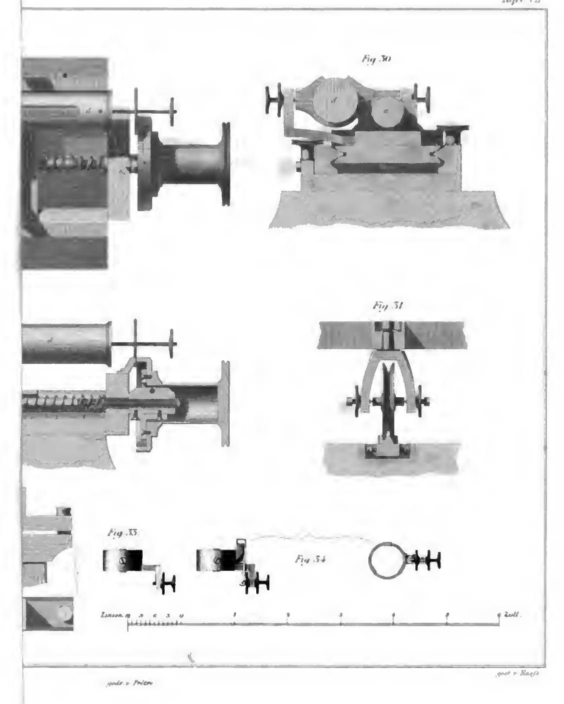
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



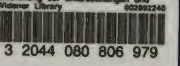
gez. v. Prieru

gest. v. Haafs

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google